Gk1 i Matematik, hemtal v37/07 Metsalo

Vi börjar med att gå igenom diverse algebraiska grundbegrepp, som finns definierade på insidan av detta blad. Därefter lär vi oss induktionsbevis, som även beskrivs i Adams i kap. 2.3. Därefter studeras vi komplexa tal, som behandlas i Appendix I i Adams. Friska upp minnet genom att studera skalärprodukten och vektorprodukten i kap. 10.1-3 samt kap. P i Adams. Sedan börjar vi med Lay.

On: Räkneövningen används till demo-uppgifterna nedan. När vi studerar de algebraiska grundbegreppen, utgår vi enbart från axiomen. Våra grupper, ringar osv. behöver inte ha det ringaste med tal att göra. Om vi t.ex. talar om 0 i en kommutativ grupp, avser vi alltså elementet med egenskapen, som beskrivs i axiom A2, dvs. enhetselementet under (den kommutativa) operationen, inte nödvändigtvis talet 0.

1) $\mathcal{M}=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R},\ x\neq 0\}$ är mängden av ordnade par av reella tal, där 1:a talet är $\neq 0$. $\S$ är en binär operation på $\mathcal{M}$, som ges av $(a,b)\,\S\,(c,d)=(ac,\ ad+b)$. Vi visar att $(\mathcal{M},\S)$ är en icke-kommutativ grupp.

2) Vi visar sats 6, som är bekant från heltalen, där multiplikationen kan tolkas som en form av upprepad addition. Men satsen följer alltså ur definitionen av ringar.

3) Vi visar sats 7 och dess följdsats. Vid multiplikation av heltal säger följdsatsen, att $(-1)\cdot(-1)=1$, vilket torde vara bekant från tidigare. Men vi visar att detta är en konsekvens av de egenskaper, som operationerna i en allmän ring med etta enligt definitionerna har.

4) Sats 8 används i beviset av sats 9, som i sin tur används i beviset av sats 10. Vi visar satserna 8 och 9.

5) Talen a_n, $n=1,2,3,\ldots$ definieras via $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ för $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. Vi visar mha. induktion att a) $a_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, b) $a_n<3,\ \forall n\in\mathbb{N}$ och c) $a_{n+1}>a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Fortsättning och fredagens hemtal på baksidan.
Diverse algebraiska grundbegrepp på insidan.

6) Summan $f+g$, produkten $f\cdot g$ och sammansättningen $f\circ g$ av två funktioner f och g definieras via $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ resp. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. En funktion p på formen $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ kallas för ett <u>polynom</u>. Om tiden tillåter, studerar vi mängden P av alla polynom under de tre binära operationerna addition, multiplikation resp. sammansättning av funktioner:

Vilka av axiomen A0-4 är satisfierade i resp. fall och vilka är de resp. enhetsfunktionerna (om en sådana existerar i mängden i fråga)? Är någon operation distributiv m.a.p. någon annan?

Fr: 1a) $a*b=a*c \Leftarrow b=c \Rightarrow b*a=c*a$ gäller för halvgrupper. Visa att för grupper gäller även motsatsen, dvs. visa sats 4. Förklara ingående vilket axiom eller vilken sats används i varje steg.

b) $a=b \Rightarrow a^{-1}=b^{-1}$ gäller för grupper. Visa att även motsatsen gäller, dvs. visa sats 5. Förklara åter ingående.

2) Låt $(M,*)$ vara en grupp sådan att $a^{-1}=a$, $\forall a\in M$, dvs. $a*a=e$, $\forall a\in M$. Visa att gruppen är kommutativ.

3) Betrakta följande påstående $P(n)$: $1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{1}{8}\cdot(2n+1)^2$, $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) Visa att "induktionssteget" håller för alla $n\geq 1$, dvs. att om $P(k)$ är sant, så är även $P(k+1)$ sant.

b) Visa att $P(n)$ trots detta är falskt för alla $n\in\mathbb{N}$.

4a) Visa att $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ för $n=0,1,2,\ldots$

b) Visa att om $a\neq 1$, är $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+n\cdot a^{n-1} = (1-(n+1)\cdot a^n+n\cdot a^{n+1})/(1-a)^2$ för $n=1,2,3,\ldots$

<u>Testuppgift</u>: Använd <u>exakt</u> samma argument som i uppg. 4 ovan för att visa att $n^2=n$ för $n=0,1,2,\ldots$ Om detta lyckas, så har ni missförstått induktion.

Demo: Vi visar att om $(\mathcal{M},+,*)$ är en divisionsring, så är $(\mathcal{M}\setminus\{0\},*)$ en grupp. Sats 6 har en central plats i beviset.