Exempel på integrering av rationella funktioner

Förberedelse (att skapa ett bra exempel)

$$x^2+3+\frac{2}{x}+\frac{-5}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{2x+3}{x^2+4}=$$

$$=[(x^7-6x^6+16x^5-42x^4+75x^3-72x^2+108x)+$$
$$+(2x^4-12x^3+26x^2-48x+72)+(-5x^4+15x^3-20x^2+60x)+$$
$$+(x^3+4x)+(2x^4-9x^3+27x)]/[x\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+4)]=$$
$$=\frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}$$

Ex: Beräkna $\displaystyle\int\frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}\,dx$

1. grad(P) = 7 ≥ grad(Q) = 5 ⇒ lång division

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad +3 \\
\hline
x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x & x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72 \\
 & \underline{x^7-6x^6+13x^5-24x^4+36x^3} \\
 & 3x^5-19x^4+34x^3-66x^2+151x+72 \\
 & \underline{3x^5-18x^4+39x^3-72x^2+108x} \\
 & -x^4-5x^3+6x^2+43x+72
\end{array}$$

$$\therefore\ \frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}=$$
$$=x^2+3+\frac{-x^4-5x^3+6x^2+43x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}$$

2. Dela upp $Q(x)=x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x$ i faktorer. Vi ser, att x är en faktor. $Q(x)=x\cdot(x^4-6x^3+13x^2-24x+36)$.
Hemtal 2, fr v42 ger att $x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm9,\pm12,$ ±18 och ±36 är möjliga rationella nollställen. Prövning ger att $x=3$ är ett nollställe, så vi kan faktorisera $Q(x)=x\cdot(x-3)\cdot(x^3-3x^2+4x-12)$. Samma sats ger att $x=3$ är ett dubbelt nollställe. $Q(x)=x\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+4)$. Detta kan inte faktoriseras mer, för x^2+4 saknar (reella) nollställen.

3. Dela upp i partialbråk.

$$x^2+3+\frac{-x^4-5x^3+6x^2+43x+72}{x(x-3)^2(x^2+4)}=$$

$$=x^2+3+\frac{A_{11}}{x}+\frac{A_{21}}{x-3}+\frac{A_{22}}{(x-3)^2}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+4}$$

Vi måste nu beräkna $A_{11}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, C_{11}$.

$$-x^4-5x^3+6x^2+43x+72=A_{11}\cdot(x-3)^2(x^2+4)+$$
$$+A_{21}\cdot x(x-3)(x^2+4)+A_{22}\cdot x(x^2+4)+(B_{11}x+C_{11})\cdot x(x-3)^2=$$
$$=A_{11}\cdot(x^4-6x^3+13x^2-24x+36)+A_{21}\cdot(x^4-3x^3+4x^2-12x)+$$
$$+A_{22}\cdot(x^3+4x)+B_{11}\cdot(x^4-6x^3+9x^2)+C_{11}\cdot(x^3-6x^2+9x)=$$
$$=x^4\cdot(A_{11}+A_{21}+B_{11})+x^3\cdot(-6A_{11}-3A_{21}+A_{22}-6B_{11}+C_{11})+$$
$$+x^2\cdot(13A_{11}+4A_{21}+9B_{11}-6C_{11})+x\cdot(-24A_{11}-12A_{21}+4A_{22}+9C_{11})+1\cdot(36A_{11})$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{11}+A_{21}+B_{11}&=-1\\
-6A_{11}-3A_{21}+A_{22}-6B_{11}+C_{11}&=-5\\
13A_{11}+4A_{21}+9B_{11}-6C_{11}&=6\\
-24A_{11}-12A_{21}+4A_{22}+9C_{11}&=43\\
36A_{11}&=72
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}
A_{11}&=2\\
A_{21}&=-5\\
A_{22}&=1\\
B_{11}&=2\\
C_{11}&=3
\end{aligned}\right.$$

Märk, att antalet ekvationer = antalet obekanta = grad(Q) = 5.

4. Integrera termvis.

$$\int\frac{x^7-6x^6+16x^5-43x^4+70x^3-66x^2+151x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}\,dx=\{1.\}=$$

$$=\int\left(x^2+3+\frac{-x^4-5x^3+6x^2+43x+72}{x^5-6x^4+13x^3-24x^2+36x}\right)dx=\{2.\}=$$

$$=\int\left(x^2+3+\frac{-x^2-5x^3+6x^2+43x+72}{x(x-3)^2(x^2+4)}\right)dx=\{3.\}=$$

$$=\int\left(x^2+3+\frac{2}{x}+\frac{-5}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{2x}{x^2+4}+\frac{3}{x^2+4}\right)dx=$$

= {först nu utförs alltså själva integreringen} =

$$=\frac{x^3}{3}+3x+2\ln|x|-5\ln|x-3|-\frac{1}{x-3}+\ln|x^2+4|+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+3x+\ln(x^2)-5\ln|x-3|-\frac{1}{x-3}+\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$$

Funktionen är integrerbar i $]-\infty,0[$, $]0,3[$, $]3,\infty[$.
I olika intervall kan vi ha olika konstanter C.