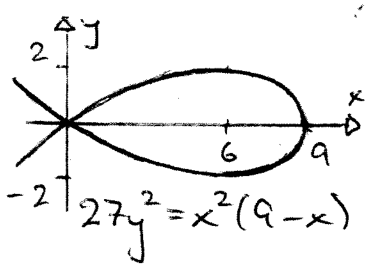
Gk 1 i Matematik, hemtal v48/06 Metsalo

Torsdagen 30.11. har vi 3:e datorövningen, då vi åter använder programpaketet Mathematica. Uppgifterna till datorövningen delas ut separat.

Ov: 1a) 5.5.9/7/7 b) 5.5.10/8/8 c) 5.5.19/17/17
d) 5.5.20/18/18 e) 5.6.9/7/7 f) 5.6.14/12/12
g) 5.6.17/15/15 h) 5.6.27/23/23 (Uppl. 4/5/6)

2) Kurvan $27y^2 = x^2(9-x)$ bildar en ögla som i figuren t.h.



a) Ansätt att $y=y(x)$ och bestäm punkterna, där kurvan har horisontell tangent mha. implicit derivering.

b) Ansätt att $x=x(y)$ och bestäm punkterna, där kurvan har vertikal tangent mha. implicit derivering.

c) Bestäm tangentlinjens lutning i origo (där kurvan skär sig själv) mha. explicit derivering.

d) Beräkna arean innanför öglan.

Beräkna följande anti-derivator (obestämda integraler):

3a) $\int x \cdot \sin(3x^2)dx$ b) $\int x \cdot \sin(3x)dx$

c) $\int (e^{2x}/(1+e^{2x}))dx$ d) $\int (e^{x}/(1+e^{2x}))dx$

4a) $\int (\sin x)^{-1} dx = \int \csc x \, dx$

b) $\int \sin^{-1} x \, dx = \int \arcsin x \, dx$

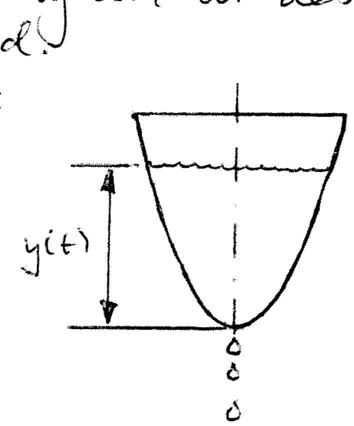
c) $\int \sin^3 x \, dx = \int (\sin x)^3 dx$

d) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\sin x)^2 \cdot (\cos x)^4 dx$

Märk bristen på logik vid jämförelse av beteckningarna i a), b) resp. c), d). Tyvärr är dessa ologiska beteckningar standard.

Demo: Klepshydran (vattenuret):

Torricellis lag säger att då en vätska läcker ut genom bottnet på ett kärl, sker det så att $dV/dt = -k \cdot \sqrt{y(t)}$, där y är vätskedjupet. Vi konstruerar en rotationssymmetrisk skål, där vätskedjupet sjunker med konstant hastighet.



Fr: 1a) 6.1.31 b) 6.1.32 (alla 3 upplagorna)

2a) Beräkna $\int dx/\sqrt{x^2+5}$ mha. Eulers substitution $t = x + \sqrt{x^2+5}$.

b) Beräkna $\int dx/\sqrt{x^2+5}$ mha. den trigonometriska substitutionen $x = \sqrt{5}\cdot\tan\theta$.

3a) Beräkna följande anti-derivator (obest. integraler):

i) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^3+8}$ ii) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{(x^2+1)^2}\,dx$

(Kontrollera gärna svaren mha. t.ex. Mathematica)

b) Undersök huruvida den generaliserade integralen konvergerar eller divergerar samt bestäm dess värde i händelse av konvergens:

i) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^3+8}$ ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$

4) Om $f(x) = e^{\sin x}$, så är $|f(x)| \le e$, $|f'(x)| \le 1.5$, $|f''(x)| \le e$, $|f'''(x)| \le 4.5$ och $|f^{(4)}(x)| \le 4e$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Beräkna en approximation av integralen $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x}\,dx$ mha. trapetsmetoden. Dela upp integrationsintervallet i fyra lika stora delintervall ($n=4$). Beräkna också en övre gräns för diskretionsfelet mha. olikheterna ovan.

b) Dito mha. Simpsons metod. (Nu är $2n = 4$)

OH CALCULUS, OH CALCULUS

(To: "Oh, Christmas Tree")

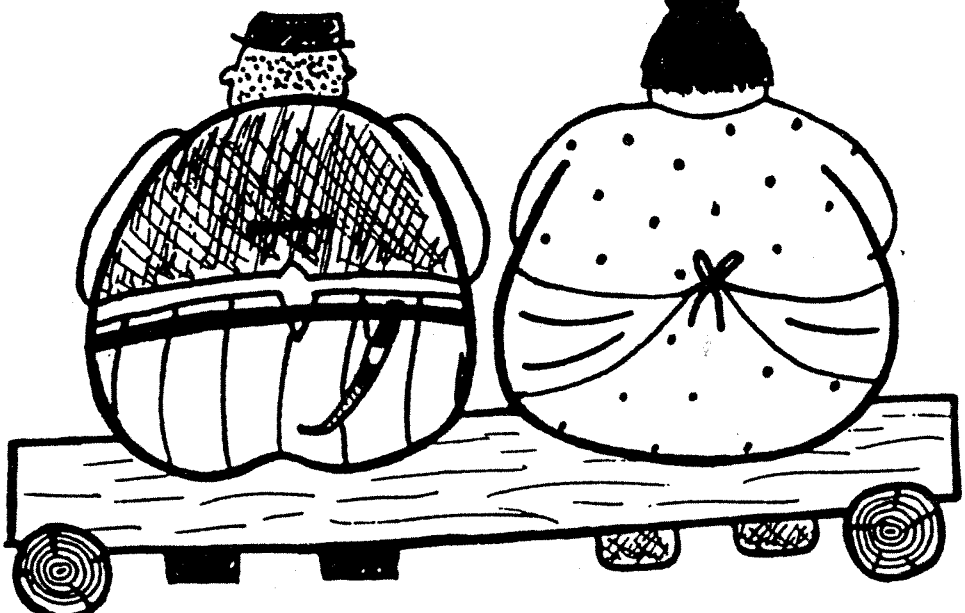
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
How different seem thy branches.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
How different seem thy branches.
Derivatives tell us the rate,
For areas we integrate.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
How different seem thy branches.

Derivative, Derivative,
The limit your foundation,
Derivative, Derivative,
The limit your foundation.
A quotient, both parts growing nil,
Behold you reach a value still.
Derivative, Derivative,
The limit your foundation.

Oh, Integral; Oh, Integral,
Partitions getting finer.
Oh, Integral; Oh, Integral,
Partitions getting finer.
Add more and more of less and less,
The errors disappear, we guess.
Oh, Integral; Oh, Integral,
Partitions getting finer.

Oh, Calculus; Oh, Calculus,
United are thy branches.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
United are thy branches.
Because of that eternal gem,
The Fundamental Theorem.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
United are thy branches.

by Leon Hall and Ilene Morgan
University of Missouri–Rolla



$$\frac{mn}{c} = \frac{q}{a}$$

Demo: Demo-uppgiften förra fredagen gav att
$e \approx 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n! + 2/(n+1)!$
med ett fel $< 1/(n+1)!$ till absolutbeloppet, så vi kan approximera talet e med rationella tal med godtyckligt litet fel.
Nu skall vi approximera talet π med rationella tal med godtyckligt litet fel:
$\int_0^1 dx/(1+x^2) = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4 - 0 = \pi/4$ så $\pi = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$. Vi approximeras talet $\pi = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ genom att använda Simpsons metod och $2n$ delintervall. Vi bestämmer också en övre gräns för felet i approximationen.
I kap 9 får vi redskap för att visa, att även $\pi \notin \mathbb{Q}$

På baksidan finns fjolårets mellanförhör nr. 3.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 3 15.12.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. a) Funktionen $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{x}$ är inte definierad i origo, men har dock ett gränsvärde där. Beräkna $lim_{x \to 0} f(x)$.
b)
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ,x \neq 0 \\ lim_{x\to 0} f(x) & ,x = 0 \end{cases}$$
är f:s kontinuerliga utvidgning och är definierad och kontinuerlig i hela $\mathbf{R}$. Bestäm $F'(0)$.
c) Bestäm $F''(0)$.

2.
$$I = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{2/3} + t^{4/3}}$$
Beräkna I. Ett bevis på att den generaliserade integralen konvergerar (utan att dess värde beräknats) ger 2 tröstpoäng.

3. Beräkna volymen hos kroppen som uppstår då det plana området som begränsas av kurvorna $y = x^2/4$ och $x = 2y^3$ roterar kring x-axeln med hjälp av
a) tvärsnittsmetoden (skivformeln)
b) metoden med cylindriska skal.

4. Beräkna arean hos den paraboliska reflektorn som uppstår då parabelbågen $y = H(x/R)^2, 0m \leq x \leq R$ (se skissen till höger) roterar kring y-axeln.