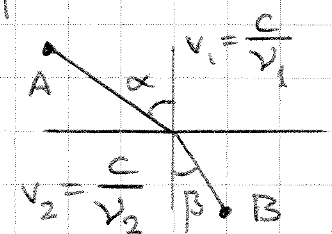
Gk1 i Matematik, hemtal v47/06 Metsalo

Onsdagens räkneövning används åt nedanstående demo. På insidan finns ett exempel på integrering av en rationell funktion (jmf. m. kap 6.3). De rationella funktionerna är den största funktionsklassen, vars anti-derivator är elementära funktioner.

Integreringen sker i fyra steg:

1. Lång division, så täljarens gradtal blir lägre än nämnarens gradtal.
2. Uppdelning av nämnar-polynomet i faktorer med grad ≤ 2. Detta kan vara svårt, om nämnaren har högt gradtal.
3. Uppdelning i partialbråk.
4. Själva integreringen (steg 1–3 är förberedelser)

Ons: Demo a) Fermats princip säger att då ljus tar sig från en punkt till en annan går det längs den snabbaste vägen. Om vi har två media med ljushastigheterna v_1 resp. v_2 och ljuset skall gå från en punkt A i det ena mediet till en punkt B i det andra, så säger Snells lag att ljuset bryts så att $\sin\alpha / \sin\beta = v_1 / v_2$.

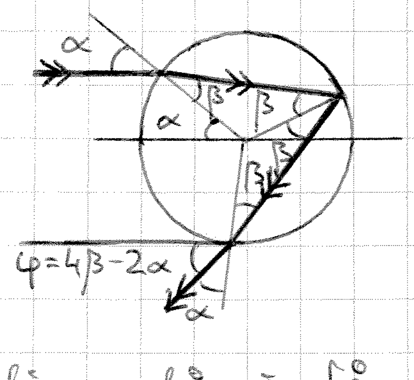


Vi härleder Snells lag ur Fermats princip.
$\nu_i = c / v_i$ kallas för mediets brytningsindex.

b) I Ekbom: Räknetabeller hittar vi vattnets brytningsindex:

Våglängd (nm):	760.8	686.7	656.7	589.3	527.0	486.1	430.8	396.8
Brytningsindex:	1.329	1.330	1.331	1.333	1.335	1.337	1.341	1.344

Vi använder den informationen och Snells lag ovan till att visa var, hur och kanske det intressantaste: varför man hittar regnbågen, då solen skiner lågt på himlen och det regnar.



Verifiera resultatet via observation, då ni får ett lämpligt tillfälle till det.

Fredagens hemtal på baksidan.

Fr: 1) Bestäm hur många reella nollställen funktionen $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 4$ har samt använd Newtons metod (även känd som Newton-Raphsons metod) för att approximera dessa med två korrekta decimaler. Visa hur vi vet, att bägge decimalerna är korrekta.

2) Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylor-polynomet utvecklat i punkten $a=0$) av ordning (grad) $n=3$ till funktionen $f(x) = \sqrt{\exp(x) + \sin(x)} = \sqrt{e^x + \sin(x)}$.

3) Bestäm alla asymptoter till kurvan till höger: $y = f(x) = \dfrac{x}{1+e^{-x}} - \dfrac{1}{x}$

4a) Bestäm parametern a så att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} (e^{3x} - \sqrt{1+ax})/x^2$ blir ett ändligt tal b.

b) Bestäm detta ändliga gränsvärde $b = \lim_{x\to 0} (e^{3x} - \sqrt{1+ax})/x^2$ för detta parametervärde a.

c) Funktionen $f(x) = \begin{cases} (e^{3x} - \sqrt{1+ax})/x^2, & 0 < |x| < 1/|a| \\ b, & x = 0 \end{cases}$

med a och b från ovan är kontinuerlig i origo. Bestäm $f'(0)$.

Demo: Maclaurin-polynomet $P_n(x)$ av funktionen $f(x) = e^x$ är $P_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n! = \sum_{k=0}^{n} x^n/n!$, vilket fås enkelt eftersom $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$. Felet i approximationen $f(x) \approx P_n(x)$ är då $E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot e^{\bar{X}} \cdot (x-0)^{n+1} = e^{\bar{X}} \cdot x^{n+1}/(n+1)!$, där $\bar{X}$ är mellan 0 och x. I synnerhet fås vi att $e = f(1) \approx P_n(1) = 1 + 1 + 1/2! + \ldots + 1/n! = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ med ett fel $f(1) - P_n(1) = e^{\bar{X}} \cdot 1/(n+1)! < \{2 < e < 3$ och $\bar{X}$ är mellan 0 och 1, så $e^{\bar{X}} < 3^1 = 3\} < \frac{3}{(n+1)!}$

Detta gör att vi kan approximera talet e (som i kap. 3.3 definierades mha. en area) med ett godtyckligt litet fel: $\sum_{k=0}^{m} 1/k! < e < \sum_{k=0}^{n} 1/k! + 3/(n+1)!$ gäller för alla naturliga tal m och n. I kap. 9 får vi redskap för att visa, att $e \notin \mathbb{Q}$.