Gk1 i Matematik, hemtal v43-44/06 Metsalo

To 26.10.–on 1.11. är det tentamensperiod, så då meddelas ingen undervisning i kursen.
På insidan av detta blad finns en tillämpning av 2:a ordningens linjära homogena differentialekvationer, som behandlas i kap. 3.7. Studera hur den fysikaliska situationen leder till en differentialekvation och hur vi får lösningen till den mha. en lämplig ansats.

On: 1) Visa att $f(x)=x^3-2x-5$ har (minst) ett nollställe i
v43 det öppna intervallet $]2,3[$ samt bestäm detta nollställe med ett fel < 0.01 mha. intervallhalveringsmetoden. (Vi söker alltså ett tal a sådant att $f(a)=0$, men nöjer oss med ett tal $b \ni |b-a|<0.01$. Däremot räcker det inte om vi finner ett tal $c \ni |f(c)| < 0.01$, för då vet vi inte om c approximerar nollstället a med ett fel < 0.01.) Förklara också hur vi kan veta att felet är < 0.01.

2) 1.5.37 Ur detta följer att om f och g är def. och kontinuerliga i $\mathbb{R}$, så är även $f \circ g$ (def. och) kontinuerlig.

3) 1.5.38 (den s.k. klämsatsen)

4) $$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\cdot \sin(1/x), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

f är bekant från datorövningen. Visa (t.ex. mha. klämsatsen ovan) att f är kont. och differentierbar i hela $\mathbb{R}$ (även i $x=0$), men att derivatan f' är diskontinuerlig. Märk även att $f'(0)>0$ men att det inte finns något intervall innehållande origo, där f är växande.

Demo: Vi visar satsen i 1.5.33 mha. hjälpsatsen i 1.5.32 och satsen i 1.5.36 mha hjälpsatserna i 1.5.34 och 1.5.35. Ur dessa satser får vi att produkten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig och att kvoten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig, där den är definierad.

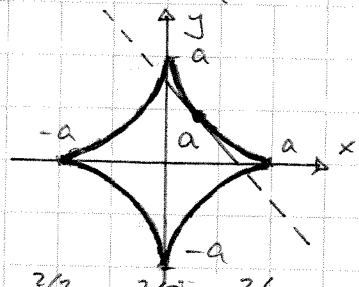
Nästa fredags hemtal på baksidan

Fr: 1a) Antag att f & g är tillräckligt många gånger
v44 deriverbara. Låt $h_1(x) = (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$. Då är $h_1'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$. Bestäm $h_1''(x)$ och $h_1'''(x)$.

b) Låt $h_2(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x))$. Då är $h_2'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$. Bestäm $h_2''(x)$ och $h_2'''(x)$.

c) Antag att f är 3 gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av origo och att $f(0)=1$, $f'(0)=2$, $f''(0)=8$ och $f'''(0)=17$. Låt $h_3(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 1/f(x)$. Då är $h_3(0)=1$. Beräkna $h_3'(0)$, $h_3''(0)$ och $h_3'''(0)$.

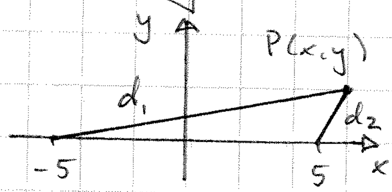
2) "Den fallande stegens kurva".
Asteroiden $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, som kan ges på parameterform som $(x,y)=(a\cdot\cos^3 t, a\cdot\sin^3 t)$, $t\in\mathbb{R}$, är bekant från datorövningen.



$x^{2/3}-y^{2/3}=a^{2/3}$

Visa att den delen av tangentlinjen till asteroiden, som begränsas av koordinataxlarna, har längden a.

3) Lemniskatan $d_1\cdot d_2 = 25$ är också bekant från datorövningen. Bestäm ekvationen för lemniskatans tangentlinje i punkten $(6,2)$



(som ligger på lemniskatan, eftersom $d_1\cdot d_2=\sqrt{125}\cdot\sqrt{5}$).

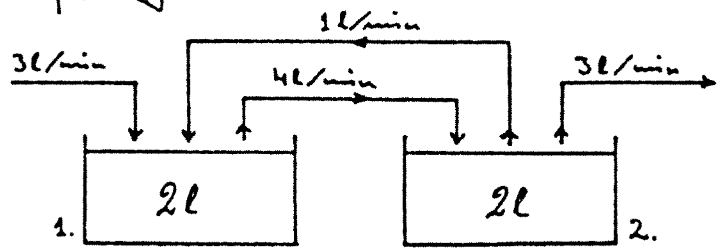
4) Kurvan $d_1\cdot d_2=30$ är också bekant från datorövningen. Bestäm de punkter på kurvan, där tangenten är horisontell och de punkter, där tangenten är vertikal.

Demo: Vi visar satsen nedan, som ger anledningen till att lång division av polynom fungerar:

Sats: Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två polynom, där g inte är nollfunktionen. Då finns det två polynom $q(x)$ och $r(x)$ $\ni$ $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ och $f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$. Vidare är polynomen q och r unika.

Torsdagen 9.11. har vi 2:a datorövningen. Då kommer vi att använda programpaketet Mathematica.

Tillämpning av differential-ekvationer.



Vi har 2 bägare, vilka vardera innehåller 2 l vatten. Vi pumpar in rent vatten i bägare 1, 3 l/min. Från bägare 1 pumpar vi 4 l/min till bägare 2 och från bägare 2 1 l/min till bägare 1. Slutligen pumpar vi 3 l/min från bägare 2 ut i slasken.
I början innehåller bägare 2 rent vatten, men i bägare 1 har vi löst 20 g salt. När kommer bägare 2 att innehålla maximal mängd salt och hur mycket salt kommer det då att finnas där?

Klart är, att efter lång tid har all salt spolats ut ur systemet. Låt oss studera, vad som händer under ett kort tidsintervall Δt min. Låt $S_1(t)$ och $S_2(t)$ beteckna saltmängden (i gram) i bägare 1 resp. 2 vid tiden t (i min).

Bägare 1: salt in: $1\,l/\text{min} \cdot S_2(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
salt ut: $4\,l/\text{min} \cdot S_1(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
(dessa är bara approximationer, för saltmängderna $S_1(t)$ och $S_2(t)$ hinner ändra sig (lite) under (det korta) tidsintervallet Δt.)
Ändringen $\Delta S_1 \approx \frac{1}{2} \cdot S_2(t) \cdot \Delta t - 2 \cdot S_1(t) \cdot \Delta t$ (gram)
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_1}{\Delta t} = S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2} \cdot S_2(t)$

Bägare 2: salt in: $4\,l/\text{min} \cdot S_1(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
salt ut: $4\,l/\text{min} \cdot S_2(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
(dessa är också bara approximationer, men ju mindre Δt är, desto bättre är approximationerna.)
Ändringen $\Delta S_2 \approx 2S_1(t) \cdot \Delta t - 2S_2(t) \cdot \Delta t$ (gram)
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_2}{\Delta t} = S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t)$

Vi har nu ett system av 2 diff. ekvationer av 1:a ordn:

$$\begin{cases} S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2}\cdot S_2(t) & \text{I} \\ S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t) & \text{II} \end{cases}$$

$S_2(t) = 2S_1'(t) + 4S_1(t)$ enl. I. Derivera I:

$$S_1''(t) = -2S_1'(t) + \tfrac{1}{2}\cdot S_2'(t) = \{\text{II}\} = -2S_1'(t) + (S_1(t) - S_2(t)) =$$
$$= -2S_1'(t) + S_1(t) - 2S_1'(t) - 4S_1(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1''(t) + 4S_1'(t) + 3S_1(t) = 0$$

Vi har en linjär, homogen diff. ekv av 2:a ordningen med konstanta koefficienter. Ansätt $S_1(t) = e^{rt}$:

$$S_1''(t) + 4S_1'(t) + 3S_1(t) = r^2e^{rt} + 4re^{rt} + 3e^{rt} = (r^2 + 4r + 3)e^{rt} = 0$$
$$\Rightarrow (r^2 + 4r + 3) = (r+1)(r+3) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -3. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1(t) = A\cdot e^{-t} + B\cdot e^{-3t} \Rightarrow S_1'(t) = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_2(t) = 2S_1'(t) + 4S_1(t) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-3t}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1'(t) &= -2S_1(t) + \tfrac{1}{2}\cdot S_2(t) \\ S_2'(t) &= 2S_1(t) - 2S_2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} S_1(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t} \\ S_2(t) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-3t} \end{cases}$$

Nu kan vi sätta in begynnelsevillkoren: $S_1(0) = 20$ och $S_2(0) = 0$ (gram) ger oss A och B.

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 20 \\ 2A - 2B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} A = 10 \\ B = 10 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} S_1(t) = 10(e^{-t} + e^{-3t}) \\ S_2(t) = 20(e^{-t} - e^{-3t}) \end{cases}$$

(saltmängderna mäts i gram, tiden i minuter.)

När antar $S_2(t)$ sitt maximum? $S_2(0) = \lim_{t\to\infty} S_2(t) = 0$, så max antas då $t = T \in\,]0, \infty[$.

$$S_2'(t) = 20(-e^{-t} + 3e^{-3t}),\quad 0 = S_2'(T) = 20(-e^{-T} + 3e^{-3T}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3e^{-3T} = e^{-T} \Rightarrow 3 = e^{2T} \Rightarrow T = \tfrac{1}{2}\cdot \ln 3 \quad \text{(minuter)}.$$
$$S_2(T) = 20(e^{-T} - e^{-3T}) = 20(3^{-1/2} - 3^{-3/2}) = 20\cdot\tfrac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{(gram)}$$

Så bägare 2 kommer att innehålla maximal mängd salt efter $\underline{T = \frac{1}{2}\cdot\ln 3 \text{ minuter}}$ (≈ 33 sekunder), då den innehåller $\underline{S_2(T) = 40/3\sqrt{3}\ g}$ (≈ 7.7 g).

Ur problemet bildade vi ett system av 2 diff. ekv. av 1:a ordn. Dessa löste vi tha en diff. ekv. av 2:a ordn. Därefter fick vi $S_1(t)$ och $S_2(t)$ ur begynnelsevillkoren. Nu vet vi alltså saltmängderna för alla $t \geq 0$.