Gk1 i Matematik, hemtal v42/06 Metsalo

Onsdagens räkneövning används åt nedanstående demo, som ger en ny binär operation i $\mathbb{R}^3$ vid sidan av additionen och vektorprodukten. På köpet får vi också en djup samning om livet.
Fredagens hemtal är på baksidan.

On: Demo: Denna uppgift använder det mesta vi lärt oss hittills!
Om man vrider en boll kring en axel genom mittpunkten, ändras inte positionen hos bollens mittpunkt. Nu visar vi att också motsatsen gäller: Om man vrider en boll godtyckligt, så att mittpunktens position förblir oförändrad, är slutresultatet detsamma som om vridningen skett kring någon axel genom mittpunkten.

Enhetsvektorerna $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ bildar ett ortonormalt högersystem: ortogonalt: $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3 \perp \hat{e}_1$, normerat: $\|\hat{e}_1\| = \|\hat{e}_2\| = \|\hat{e}_3\| = 1$, högersystem: $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = +\hat{e}_3$ ($\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$ för vänstersystem). Om vi vrider dessa tre basvektorer (och därmed hela $\mathbb{R}^3$) kring någon axel genom origo, får vi tre nya vektorer $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$, vilka också bildar ett ortonormalt högersystem, som också är en bas för $\mathbb{R}^3$.

Nu gör vi tvärtom: Vi börjar med ett ortonormalt högersystem $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ och visar att detta alltid kan fås genom att vrida standardbasen $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ kring någon lämplig axel genom origo i $\mathbb{R}^3$.

a) Att manipulera standardbasen $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ till den nya basen $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ är en linjär operation i $\mathbb{R}^3$ som ges av matrismultiplikation med en 3×3-matris V vars kolumnvektorer är $\hat{v}_i$: Om $\hat{u} = a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3$ före manipulationen, är den $a\hat{v}_1 + b\hat{v}_2 + c\hat{v}_3$ efter manipulationen.

b) V har egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, där $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$.

c) Om λ är ett egenvärde till V, så är även komplexkonjugaten $\bar{\lambda}$ och inversen $1/\lambda$ egenvärden till V.

d) Ett av V:s egenvärden måste vara 1, så en hel linje genom origo förblir oförändrad då vi manipulerar standardbasen till den nya basen. Manipulationen är ekvivalent med att vrida $\mathbb{R}^3$ kring denna axel.

Fr: 1a) Låt $f(x) = 3x-5$ och $g(x) = (x+5)/3$. Visa att $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = I(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rita deras grafer. f och g säges vara varandras <u>inversfunktioner.</u> Mer om dessa i kap. 3.1 i Adams.

b) Visa att $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = (1+2x)/(3-x)$ och $g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $g(x) = (3x-1)/(x+2)$ är varandras inversfunktioner i bemärkelsen $f \circ g = I_{\mathbb{R} \setminus \{-2\}}$, $g \circ f = I_{\mathbb{R} \setminus \{3\}}$. Rita deras grafer.

2) Vi studerar de tre funktionerna $I(x) = x$, $s(x) = 1/x$ och $t(x) = 1-x$ definierade i $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Definiera funktionerna $u = s \circ t \circ s$, $v = s \circ t$ samt $w = v \circ v$ och visa att de sex funktionerna $\{I, s, t, u, v, w\}$ (märk: alla def. i $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$) bildar en icke-kommutativ grupp under operationen sammansättning av funktioner. Komplettera sammansättningstabellen ovan.

$\circ$	I	s	t	u	v	w
I	I	s	t	u	v	w
s	s		v			
t	t					
u	u		w			
v	v	u			w	
w	w					

3) Låt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter, dvs. $a_k \in \mathbb{Z}$. Visa att om $\alpha = p/q$ är ett rationellt nollställe till f (dvs. $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$) och heltalen p och q saknar gemensamma faktorer (dvs. bråket p/q är förkortat), så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n. (Märk dock att ett polynom med heltalskoefficienter inte behöver ha några rationella nollställen.)

4a) 1.2.12 b) 1.2.25 c) 1.2.33 d) 1.2.41
e) 1.3.3 f) 1.3.6 g) 1.3.24/24/26
h) 1.3.29/29/31 (uppl. 6/uppl. 5/uppl. 4 av Adams)

Demo: $f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{om } x \in \mathbb{Q},\ x = p/q \text{ förkortat} \\ 0, & \text{om } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Vi visar att $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ för $\forall a \in \mathbb{R}$, så f är kontinuerlig i alla irrationella punkter och diskontinuerlig i alla rationella punkter.

På insidan av detta blad finns en <u>liten sammanfattning</u> av vad vi kommer att göra under den närmaste framtiden, då vi börjar med Adams.

Liten sammanfattning av kursinnehållet under de närmaste veckorna, då vi börjar med Adams:

Kap. P torde vara främst repetition av gymnasiekunskaperna. Studera det på egen hand. I kap. P5 införs binära operationer för funktioner. Efter införandet av inversa funktioner i kap. 3.1 kan vi bilda stora funktionsklasser.

I kap. 1 införs gränsvärdesbegreppet, som är centralt inom kalkylen och via det kontinuitetsbegreppet.

I kap. 2 införs derivatan i form av ett gränsvärde. Vi får också deriveringsregler, som möjliggör derivering av de flesta funktionerna i våra funktionsklasser. Kap. 2.7 med några tillämpningar av derivatan, kap. 2.8 med högre ordningens derivator (och fakulteten) samt kap. 2.11 med tillämpningar av anti-derivatan studeras främst på egen hand. I upplaga 4, ex. 3, sid. 147 finns ett tryckfel: det står $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = k^2 y(t) = 0$, men det skall vara $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + k^2 y(t) = 0$. Rätta till felet!

I kap. 3.1 beskrivs invers-funktioner mer ingående. I kap. 3.2-3 definieras exponential- och logaritmfunktionerna på två olika (men ekvivalenta) sätt:

I kap. 3.2 utgår vi från a^r, $r \in \mathbb{Q}$, definierar a^x som ett gränsvärde och definierar $g(x) = \log_a x$ som inversfunktionen till $f(x) = a^x$ (för $0 < a \neq 1$).

I kap. 3.3 definierar vi den naturliga logaritmen ln mha. areor, definierar dess inversfunktion exp och visar, att dessa är speciella logaritm- resp. exponentialfunktioner samt får deras egenskaper, i synnerhet definitions- och värdemängd, kontinuitet och derivatorna.

Därigenom har vi alla nödvändiga redskap för att konstruera de elementära funktionerna. Från och med kap. 3.4 drar vi slutsatser av det tidigare arbetet och där blir det i huvudsak fråga om självstudier med hemtalen och bokens övningsuppgifter som komplement.

I kap. 3.4 visas några viktiga egenskaper hos exponential- och logaritmfunktionerna, nämligen att exponentialfunktionerna växer snabbare och logaritm-funktionerna långsammare än potensfunktionerna.

I kap. 3.5-6 definieras flera nya funktioner:
De cyklometriska funktionerna (arcus-fkerna) definieras som inversfunktioner till lämpliga begränsningar av de trigonometriska fkerna, de hyperboliska fkerna definieras mha exponential-fken och area-fkerna definieras som inversfkner till (lämpliga begränsningar av) de hyperboliska fkerna.

Studera definitionerna av dessa nya funktioner. Definitionerna ger nämligen deras definitions- och värdemängder. Studera också deras grafer och observera, att definitionerna medför, att dessa fkner är kontinuerliga och ger oss också deras derivator.

I kap. 3.7 illustreras hur dessa nya funktioner dyker upp i enkla fysikaliska sammanhang. Naturen mer eller mindre tvingar på oss dessa funktioner!

Trots att de trigonometriska och de hyperboliska fkerna definieras på helt olika sätt, har de formler, som är nästan identiska (så när som på olika tecken ibland). I själva verket är de trigonometriska och de hyperboliska fkerna mycket nära besläktade, vilket också figurerna på sid. 214/sid 211 indikeras, men för att detta släktskap skall framgå måste man gå över från reella tal $\mathbb{R}$ till komplexa tal $\mathbb{C}$. Mera om detta i Gk3.

Area-funktionerna kan ges explicit mha ln, såsom är gjort i kap. 3.6. Något motsvarande kan vi inte göra med de cyklometriska funktionerna (arcus-fkerna), åtminstone inte i $\mathbb{R}$.

Trots att de nödvändiga verktygen för kap. 3.4-7 ges i de tidigare avsnitten, krävs en hel del arbete på egen hand för att bli mera van vid alla dessa nya funktioner och deras egenskaper.