Gk1 i Matematik, hemtal v40/06 Metsalo

Ou: 1) Visa att speglingsmatrisen $H = I - 2\hat{n}\hat{n}^T$ i manipulation B i supplement 1 satisfierar

a) $H^T = H$ b) $H^2 = H \cdot H = I$

2) För vilka värden på konstanten k kommer det linjära ekvationssystemet att sakna lösning?

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

(Gott råd: Tänk på vad koefficientmatrisens determinant berättar om ekvationssystemets lösningar.)

3) En matris A kallas ortogonal, om A är inverterbar och $A^{-1} = A^T$. Visa att

a) A ortogonal $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$

b) A, B $n \times n$, ortogonala $\Rightarrow$ AB $n \times n$, ortogonal

c) A ortogonal $\Rightarrow A^{-1}$ ortogonal

d) De ortogonala $n \times n$-matriserna bildar en grupp under operationen matrismultiplikation.

4) Mängden $\mathcal{C}$ består av reella 2×2-matriser på formen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Man ser lätt att nollmatrisen O och identitetsmatrisen I tillhör $\mathcal{C}$ och att om A och B tillhör $\mathcal{C}$, så tillhör även A + B och −A mängden $\mathcal{C}$.

a) Visa att $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \in \mathcal{C}$

b) Visa att $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB = BA$

c) Visa att $A \in \mathcal{C}$, $A \neq O$ (nollmatrisen) $\Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{C}$

d) Visa att $\mathcal{C}$ bildar en kropp under de två binära operationerna addition och multiplikation av 2×2-matriser.

Demo: Vi visar att vridmatrisen U i manipulation 5b) i supplement 1 är ortogonal (se uppg. 2 ovan)

Fr: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ a) Bestäm X så att XA = B

b) Bestäm Y så att AY = B.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 7 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

a) Beräkna $\det(A) = |A|$

b) Beräkna $\operatorname{inv}(A) = A^{-1}$

c) Lös det linjära ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$.

3) Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Visa att i så fall är även A^T inverterbar och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Fortsättning på baksidan.

4) Låt A och B vara två matriser sådana att $A+B$ och AB bägge är definierade. Visa att om $A+B = AB$, så är $B+A = BA$.

Demo: Låt A vara en godtycklig $m \times n$-matris.

a) Vi visar att om $I + A^T A$ är inverterbar, så är $I - A(I + A^T A)^{-1} A^T$ inversmatrisen till $I + AA^T$, så i så fall är även $I + AA^T$ inverterbar.

b) Vi visar analogt att om $I + AA^T$ är inverterbar, så är även $I + A^T A$ inverterbar.

c) Vi visar att $I + A^T A$ (och därmed även $I + AA^T$) är inverterbar för varje $m \times n$-matris A.

Nedan finns fjolårets mellanförhör nr 1. Somliga av uppgifterna torde vara bekanta från hemtalen ovan.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.~~451~~ 1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1 (10 op)

Mellanförhör nr 1 17.10.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Visa Bernoullis olikhet $(1+x)^n \geq 1 + nx$ för alla $x \geq -1, n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. a) Lös 2:a-gradsekvationen $z^2 + (1-3i)z - 8 + i = 0$. Redovisa alla mellanstegen.
   b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $w^3 = -8i$ på formen $a + bi$.

3.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
   a) Bestäm X så att $XA = B$
   b) Bestäm Y så att $AY = B$
   c) Bestäm egenvärdena hos matrisen A.

4. a) Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Visa att i så fall är även A:s transponatmatris A^T inverterbar och att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
   b) Låt B vara en $n \times n$-matris. Visa att om λ är ett egenvärde till matrisen B, så är λ^2 ett egenvärde till matrisen B^2.