Gk1 i Matematik, demo-övn. on v37/06 Metsalo

Vi börjar med att gå igenom diverse algebraiska grundbegrepp, som finns definierade på insidan av detta blad. Därefter lär vi oss induktionsbevis, som även beskrivs i Adams på sid. 113, 5:e uppl. (sid. 111, 4:e uppl. / sid. 108, 6:e uppl.) Sedan går vi över till Kreyszig och börjar med kap. 12.1–2 om komplexa tal. Friska upp minnet genom att också studera kap. P i Adams och kap. 8.1–3 i Kreyszig!

Obs: När vi studerar de algebraiska grundbegreppen, utgår vi bara från axiomen. Våra grupper, ringar osv. behöver inte ha det ringaste med tal att göra! Om vi t. ex. talar om 0 i en kommutativ grupp, avser vi alltså elementet med egenskapen, som beskrivs i axiom A2 dvs. enhetselementet under (den kommutativa) operationen, inte nödvändigtvis talet 0.

1) $\mathcal{M} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ är mängden av ordnade par av reella tal, där 1:a talet är $\neq 0$. § är en binär operation på $\mathcal{M}$, som ges av $(a,b)\,\S\,(c,d) = (ac, ad+b)$. Vi visar att $(\mathcal{M}, \S)$ är en icke-kommutativ grupp.

2) Vi visar att grupper också kan definieras på ett till synes svagare sätt:

A0) $x, y \in \mathcal{M} \Rightarrow x * y \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ sluten under $*$)

A1) $(x*y)*z = x*(y*z)$ ($*$ associativ)

A2´) $\exists e \in \mathcal{M} \ni e*a = a, \ \forall a$ (e vänsterenhet)

A3´) $\forall a \in \mathcal{M}\ \exists a^{-1} \in \mathcal{M} \ni a^{-1}*a = e$ (a^{-1} vänsterinvers)

Vi visar att vänsterenheten är unik, att vänsterinversen också är högerinvers (så den satisfierar axiom A3) och slutligen att vänsterenheten också är högerenhet (så den satisfierar axiom A2). Märk att vi inte antar kommutativitet (axiom A4) hos operationen.

3) Vi visar sats 6, som är bekant från heltalen, där multiplikationen kan tolkas som en form av upprepad addition. Men satsen följer alltså ur definitionen av ringar.

Forts. på baksidan

4) Vi visar sats 7 och dess följdsats. Vid multiplikation av heltal säger följdsatsen att $(-1)\cdot(-1)=1$, vilket torde vara bekant från tidigare. Men vi visar att detta är en konsekvens av de egenskaper, som operationerna i en allmän ring med etta har enligt definitionen.

5) Sats 8 används i beviset av sats 9, som i sin tur används i beviset av sats 10. Vi visar sats 8.

6) Talen a_n, $n=1,2,3,\ldots$ definieras via $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ för $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. Vi visar mha. induktion att a) $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ b) $a_n<3$, $\forall n\in\mathbb{N}$ och c) $a_{n+1}>a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

7) Summan $f+g$, produkten $f\cdot g$ och sammansättningen $f\circ g$ av två funktioner f och g definieras via $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ resp. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. En funktion p på formen $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ kallas för ett <u>polynom</u>. Om tiden tillåter, så studerar vi mängden P av alla polynom under de tre binära operationerna addition, multiplikation resp. sammansättning av funktioner:
Vilka av axiomen A0-4 är satisfierade i resp. fall och vilka är de resp. enhetsfunktionerna (om sådana existerar i mängden i fråga)? Är någon operation distributiv map. någon annan?

Fredagens räkneövning är inställd pga. pluxintagning.