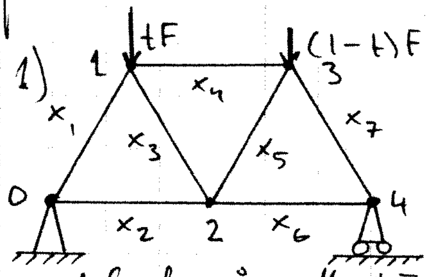
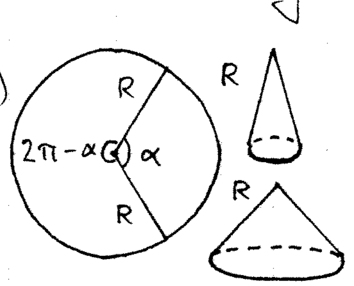
Gk1 i Matematik, datorövning 3, 30.11.2006 Metsalo

0) Läs igenom uppg. 0 från datorövn. 1 och handla därefter!

Under denna datorövning använder vi också programpaketet Mathematica, så det kan vara värt att taga med uppgiftsbladet till datorövning 2 (med den lilla sammanfattningen på baksidan) samt Lankkanens kompendium.

1) 

Vi studerar en generalisering av problemet med fackverket i Demo, fr v39 och uppg. 5, datorövn. 1. Nu är totalkraften F uppdelad så att tF belastar nod 1 och $(1-t)F$ nod 3 (med $t \in [0,1]$; tidigare var $t = 0.7$). Sätt $F = 1$, så dragkrafterna x_i blir multiplar av F. Högerledet $\bar{b}$ i ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ blir nu beroende av parametern t. Efter att ha matat in koefficientmatrisen A och (den vektorvärda funktionen) $\bar{b}$ får vi vektorn $\bar{x}$ med de sökta dragkrafterna via `x = Simplify[Inverse[A].b]`. Sedan kan vi plotta dragkrafterna som funktioner av parametern t via kommandot `Plot[Evaluate[x], {t, 0, 1}]`.
Avgör vilken kurva hör till vilket stag, vilket värde på t minimerar maximala dragkraften (då $x_i > 0$), vilket värde på t minimerar maximala tryckkraften (då $x_i < 0$), vilka stag har hög drag- resp. tryckkraft då (så de kanske borde förstärkas) samt vilka stag har låg drag- resp. tryckkraft då (så de eventuellt kan bytas ut mot svagare och kanske billigare stag).

2) 

Detta problem är en forts. på 4.5.43/46 i Adams (uppg. 3, fr v45) då vi tillverkade en kon med maximal volym ur en cirkelskiva. Nu skär vi ut en sektor med vinkeln α ur en cirkelskiva med radien R och viker sedan två räta cirkulära koner. Bestäm vilket värde på α ger maximala sammanlagda volymen hos de två konerna. (Forts. på insidan)

2) (forts.) Här kan Solve vara bra för att bestämma derivatans nollställen (exakt), fast NSolve, som ger närmevärden, är nog mera praktisk. För att plotta totala volymen som en funktion av vinkeln α är det lämpligt att sätta $R = 1$ (varvid vi får volymen som multiplar av R^3). Vi kan också försöka approximera derivatans nollställen "själva" mha. intervallhalvering eller Newtons metod.

3) Plotta $f(x) = \sqrt{\exp(x) + \sin(x)}$ och dess Maclaurinpolynom av grad 3 från förra fredagens övning i en omgivning av $x = 0$ för att se, hur väl Maclaurinpolynomet approximerar den ursprungliga funktionen. Om det gamla x:et från uppg. 1 stör, så gör Remove[x].

4) arctan x är definierad i hela $\mathbb{R}$ och dess Maclaurinpolynom av grad $2n$ är $P_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (arctan är en udda funktion, så dess Maclaurinpolynom har bara udda potenser av variabeln). I intervallet $[-1, 1]$ approximeras funktionen tämligen väl av polynomet (allt bättre approximation, ju högre gradtal vi tar). Rita arctan x och $P_{2n}(x)$ för några olika gradtal i samma figur, som täcker ett större intervall än $[-1, 1]$, t.ex. $[-1.5, 1.5]$, för att se sambandet mellan funktionen och Taylor- (i detta fall Maclaurin-) polynomet och varför det blir problem utanför intervallet $[-1, 1]$, då gradtalet växer! På våren studerar vi serier och undersöker fenomenet mer ingående.

5) I uppgift 3, on v45 studerade vi kurvan $x^2 + e^{3x} = y + \cos y$, som är grafen $y = f(x)$ av en funktion f, som vi bara får implicit ur ekvationen och som satisfierar $f(0) = 0$. Med hjälp av implicit derivering beräknade vi $f'(0)$ och $f''(0)$ och med hjälp av dessa kan vi bilda f:s Maclaurinpolynom av grad 2: $f(x) \approx P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$. Nu låter vi Mathematica bilda 5:e gradens Maclaurinpolynom till $f(x)$.

5) (forts.) Gör först Remove[x, y, g] så att inte eventuella gamla definitioner stör de nya. Definiera g[x_, y_]:= x^2 + Exp[3*x] - y - Cos[y] och insatt = x -> 0 samt y[0] = 0. Sedan bildar vi en tabell över våra krav via kommandona
krav1 = Table[D[g[x, y[x]] == 0, {x, k}], {k, 1, 5}] och
krav2 = krav1 /. insatt De sökta derivatorna fås via
deriv = Table[D[y[x], {x, k}], {k, 1, 5}] /. insatt och
de sökta derivatornas värden fås via
derivvarden = First[Solve[krav2, deriv]]. Då borde vi känna igen y'[0] och y''[0] från räkneövningen. Maclaurin-polynomet av grad 5 får vi nu via
poly = Sum[(D[y[x], {x, k}] /. insatt /. derivvarden)/ k! *(x - (x /. insatt))^k, {k, 0, 5}]
Ladda därefter paketet ImplicitPlot via kommandot
<< Graphics`ImplicitPlot` och rita kurvan g = 0 via
bild1 = ImplicitPlot[g[x, y] == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}].
bild2 = Plot[poly, {x, -0.2, 0.2}, PlotRange -> {-1, 1}] ger Maclaurin-polynomets graf och Show[bild1, bild2] sammanför de två figurerna.

6) Låt Mathematica beräkna några av förra fredagens gränsvärden och gårdagens integraler och kontrollera därma svaren till morgondagens hemtal. Glöm dock inte, att vi vill ha lösningarna, inte bara svaren. Om några av uppgifterna från de tidigare datorövningarna är ogjorda, kan dessa också göras.

Lämna Mathematica m.h.a. Exit, stäng fönstret och glöm inte att logga ut.
På baksidan finns mellanförhör nr. 3 från 2004.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

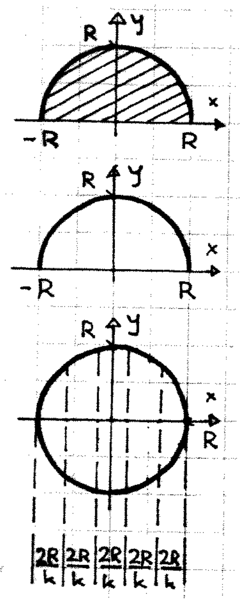
Metsalo

Mat-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 3 14.12.2004

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. Avgör huruvida gränsvärdet existerar och beräkna det, om så är fallet:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\sin x}}{\arctan x}, \quad \text{b)} \lim_{y\to 1} \left(\frac{y}{y-1} - \frac{1}{\ln y}\right), \quad \text{c)} \lim_{u\to 0} \frac{1}{u^3}\int_0^u \sin(t^2)dt.$$

2. Då den skuggade halvcirkeln i den övre figuren till höger roterar kring x-axeln, uppstår ett klot med radien R. Dess volym är som bekant $V = \frac{4\pi}{3}R^3$. Bekräfta detta genom att beräkna klotets volym med hjälp av
a) tvärsnittsmetoden (skivformeln),
b) metoden med cylindriska skal.

3. a) Då halvcirkelbågen i den mittersta figuren till höger roterar kring x-axeln, uppstår en sfär med radien R (begränsningsytan till klotet i föregående uppgift). Dess area är som bekant $A = 4\pi R^2$. Bekräfta detta genom att beräkna sfärens area med hjälp av en lämplig integral.
b) Visa att om sfären skäres i k stycken lika tjocka skivor, kommer varje skiva att ha samma area, nämligen $4\pi R^2/k$.

4. En 1:a ordningens ordinär differential-ekvation (ODE), som kan skrivas på formen $v'(x) = \frac{dv}{dx} = f(x)g(v)$ (där f och g är två givna funktioner och $v(x)$ är den sökta funktionen), kallas för en *separabel* 1:a ordningens ODE.
En 1:a ordningens ODE, som kan skrivas på formen $y'(x) = \frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x})$ (där h är en given funktion och $y(x)$ är den sökta funktionen), kallas för en *homogen* 1:a ordningens ODE. (Varning: Begreppet *homogen* används inom matematiken för att beteckna många andra egenskaper också.)
a) Visa att en homogen 1:a ordningens ODE $y'(x) = h(\frac{y}{x})$ kan omvandlas till en separabel 1:a ordningens ODE genom att införa en ny (sökt) funktion $v(x)$ via $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, så $y(x) = xv(x)$. Hurudan blir den separabla 1:a ordningens ODE, som den nya funktionen $v(x)$ måste satisfiera?
b) Bestäm lösningen $y(x)$ till den homogena 1:a ordningens ODE $y'(x) = \frac{y}{x} + e^{y/x}$, som satisfierar begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ genom att använda metoden beskriven i a)-delen. (Lösningen $y(x)$ visar sig ha en singularitet i $x = e^{-e}$, men duger som lösning för $x > e^{-e}$.)
Gott råd: Det är enkelt att kontrollera, att svarsfunktionen satisfierar såväl differential-ekvationen som begynnelsevillkoret.

Glöm inte att lämna in kursutvärderingarna till studiechefen. God Jul och Gott Nytt År!