Gk1 i Matematik, hemtal v39/05 Metsalo

På insidan av detta blad attackeras några linjära ekvationssystem mha. Gauss-Jordans metod. Studera dem!
I Kreyszig förekommer (åtminstone) 2 tryckfel:
formel 2g), sid. 313: $C(A+B) = CA + CB$ och
formel 1, sid. 370: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Rätta dessa!
Observera, att i kap. 8.1-3 definieras Kreyszig såväl skalär- som vektorprodukten på två olika, men ekvivalenta sätt: dels geometriskt (def. 1), dels mha. komponenter (def. 2). Skalär- och vektorprodukten är alltså geometriska storheter (enligt def. 1), men beräknas lämpligast mha. komponenterna enligt def. 2.

Ti: 1a) Om A är en $n\times n$-matris, så är $A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$. Visa att $\frac{1}{2}(A+A^T)$ är symmetrisk och $\frac{1}{2}(A-A^T)$ anti-symmetrisk. Visa också att detta är enda sättet på vilket A kan skrivas som summan av en symmetrisk och en anti-symmetrisk matris.

b) Låt B vara en godtycklig $m\times n$-matris. Visa att B^TB och BB^T bägge är symmetriska matriser.

2a) Ge en reell 2×2-matris $A \neq 0$ (nollmatrisen) sådan att $A^2 = AA = 0$. Märk: det finns inga reella eller komplexa tal med motsvarande egenskap.

b) Ge en reell 2×2-matris B sådan att $B^2 = BB = -I$. Märk: det finns inga reella tal med motsvarande egenskap, men väl två komplexa: $\pm i$.

3a) 6.3.6 b) 6.3.7 c) 6.3.13 ur Kreyszig

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a) Visa att ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ saknar lösning.
b) Lös ekv. systemet $A^TA\bar{x} = A^T\bar{b}$.

Sensmoral: $A\bar{x} = \bar{b} \not\Leftrightarrow A^TA\bar{x} = A^T\bar{b}$.

Demo: $\begin{cases} x + y + z = -5 \\ -x + 2y - 7z = 11 \\ 3x + 2y + \alpha z = -17 \\ x + 3y - z = \beta \end{cases}$ Vi bestämmer lösningarna till det linjära ekvationssystemet för olika värden på parametrarna (talen) α och β mha. Gauss' elimination och bakåt-substitution.

Fredagens hemtal på baksidan

Fr: 1a) 6.3.18   b) 6.3.21 ur Kreyszig

2a) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ 5x + 4y + 2w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \\ y + 5z + 3w = 0 \end{cases}$ Bestäm allmänna lösningen till det linjära, homogena ekvationssystemet mha. Gauss' elimination och bakåtsubstitution.

b) $\begin{cases} x + y + 2z - w = 3 \\ 3x - y + z - 2w = 1 \\ 2x - 2y - z - w = -2 \\ x - 3y - 3z = -5 \end{cases}$ Dito för det linjära, inhomogena ekvationssystemet.

3) Vi studerar höger- och vänsterinverser till matriser, som inte nödvändigtvis är kvadratiska.

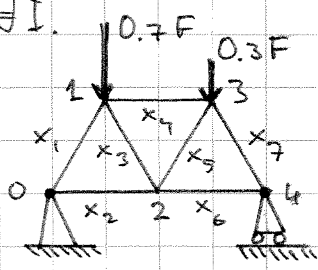
a) Finn en matris $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ sådan att $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Visa att det inte finns någon matris $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ sådan att $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Den givna matrisen har höger-, men saknar vänsterinvers.)

c) Om A är kvadratisk och $\det(A) \neq 0$, så har A en unik inversmatris $A^{-1} \ni AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Visa att A inte kan ha någon annan vänster- eller högerinvers än A^{-1} dvs. att det inte finns någon matris $B \neq A^{-1} \ni BA = I$ och inte någon matris $C \neq A^{-1} \ni AC = I$.

4) Fackverket till höger består av sju stag, som är förenade i fem noder och bildar tre liksidiga trianglar. Nod 0 är fäst vid underlaget, så den kan upptaga såväl horisontella som vertikala krafter, medan nod 4 rullar mot underlaget och kan bara upptaga vertikala krafter. Hela fackverket belastas med en kraft F, fördelad så att 0.7F belastar nod 1 och 0.3F belastar nod 3.



Om vi låter x_k stå för dragkraften i stag k (positiv, om staget drar i sina ändnoder och noderna i staget; negativ, om staget trycker på noderna och noderna på staget), kommer jämvikterna hos de horisontella krafterna i noderna 1–4 och de vertikala krafterna i noderna 1–3 att ge ett linjärt ekvationssystem med 7 ekvationer och 7 obekanta. Sätt upp ekvationssystemet, men lös det inte (det får datorn göra senare).

Demo: Vi visar att ekvationen $ax + by + cz = d$ ger ett plan i $\mathbb{R}^3$ med normalriktningen $\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. Vi visar också att avståndet från punkten (x_0, y_0, z_0) till detta plan är $D = |ax_0 + by_0 + cz_0 - d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.