Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 9
Ti 4.12.2007 klo 16-18 U322

1. (i) Osoita, että vakiokertoimisten lineaaristen differentiaalioperaattoreiden $P(D)$ ja $Q(D)$ tulon symboli on $P(\xi)Q(\xi)$.

   (ii) Olkoon $P(D)$ astetta m ja $Q(D)$ astetta ℓ. Näytä, että tulon $P(D)Q(D)$ prinsipaalisymboli on prinsipaalisymboleiden tulo $P_m(\xi)Q_\ell(\xi)$.

2. (i) Osoita, että yksiulotteisessa tilanteessa jokainen vakiokertoiminen lineaarinen differentiaalioperaattori on elliptinen.

   (ii) Olkoon $P_1(D)$ ja $P_2(D)$ elliptisiä $\mathbb{R}^n$:ssä. Todista, että tulo $P_1(D)P_2(D)$ on elliptinen $\mathbb{R}^n$:ssä.

3. Olkoon $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ja $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että

$$\text{sing supp } u * v \subset \text{sing supp } u + \text{sing supp } v.$$

   [Ohje: valitse sopivasti funktiot $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ niin että $\phi = 1$ joukon $\text{sing supp } u$ ympäristössä ja $\psi = 1$ joukon $\text{sing supp } v$ ympäristössä. Kirjoita $u * v = (\phi u + (1-\phi)u) * (\psi v + (1-\psi)v)$ ja totea, että näin syntyvistä neljästä termistä enintään kaksi on ei-sileä. Todista siis $\text{sing supp } u * v \subset \text{supp } \phi + \text{supp } \psi$, mistä väite seuraa pienellä päättelyllä.]

4. Olkoon $f, g \in C(\mathbb{R})$. Osoita, että tällöin aina funktio

$$u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$$

   toteuttaa distribuutiomielessä homogeenisen aaltoyhtälön

$$\left(\frac{d^2}{d^2 x_1} - \frac{d^2}{d^2 x_2}\right) u = 0.$$

   Totea, ettei u:n kuitenkaan tarvitse olla sileä. Miksei tämä ole ristiriidassa elliptisen regulaarisuuslauseen kanssa?

5. Tutustu Malgrange-Ehrenpreis teoreeman todistuksiin Ortnerin ja Wagnerin artikkelista (linkki kurssin kotisivuilla). Valmistaudu esittämään joku kolmesta eri ratkaisutavasta pääpiirteissään taululla.