Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 8
To 22.11.2007 klo 16-18 U322

1. Olkoon α multi-indeksi, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

   (i) Osoita, että $\widehat{(x^\alpha u)} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\mu}$.

   (ii) Translaatio $\tau_x \lambda$ määritellään (miksi?) asettamalla $\langle \tau_x \lambda, \phi \rangle = \langle \lambda, \tau_{-x} \phi \rangle$, kun $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $\widehat{(\tau_x u)} = e^{-ix\cdot\xi} \hat{\mu}$.

2. Todista luentojen propositio 3.19 (ii)-kohta: jos $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $|f(x)| \leq C(1 + |x|^2)^m$ jollakin $C, m > 0$, niin $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. Todista Fourier-muunnokselle Riemann-Lebesguen lemma: jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin $\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$. [Vihje: Sovella reaalianalyysin tietoa, jonka mukaan $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on tiheässä avaruudessa $L^1(\mathbb{R}^n)$.]

4. Olkoon $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Näytä, että Fourier-muunnos muuttaa konvoluution tuloksi:
   $$\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi}\hat{\psi}.$$
   [Opastus: Fubinin lause.]

5. Osoita, että translaatio $x \mapsto \tau_x \phi$ on jatkuva kuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, kun $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.