Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 7
Ti 13.11.2007 klo 16-18 U322

1. Osoita, että
$$\lambda_1 * (\lambda_2 * \lambda_3) = (\lambda_1 * \lambda_2) * \lambda_3,$$
kun $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ja $\lambda_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Osoita Lause 2.14.

3. Tarkastellaan yksiulotteista tilannetta.

   (i) Etsi operaattorille $P = \frac{d}{dx} + 1$ perusratkaisu ratkaisemalla yhtälö $u' + u = \phi$, missä $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, ja antamalla ϕ:n lähestyä deltadistribuutiota.

   (ii) Osoita, että yhtälöä $u'' - u = 0$ vastaavalla operaattorilla on perusratkaisu muotoa $E(x) = c\exp(-|x|)$, missä c on vakio (etsi se). Määritä kaikki kyseisen yhtälön perusratkaisut.

4. Osoita, että $E = \frac{1}{2\pi}\log|x|$ toteuttaa $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ ja $\Delta E = \delta_0$.

5. Olkoon $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda > 0$. Osoita, että Fourier-muunnos muuntuu translaatiossa ja dilaatiossa seuraavasti:

   (i) $\widehat{(\tau_x\phi)}(\xi) = e^{-ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)$,

   (ii) $(\widehat{e^{ix\cdot y}\phi(y)})(\xi) = \tau_x\hat{\phi}(\xi)$ ja

   (iii) $(\widehat{f(\cdot/\lambda)})(\xi) = \lambda^n\hat{f}(\lambda\xi)$.