Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 6
Ti 23.10.2007 klo 16-18 U322

1. Osoita, että jos $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, niin $\lambda * \phi \in C(\mathbb{R})$.

2. Jos $\lambda \in \mathcal{E}'$, niin kuvaus $\phi \mapsto \lambda * \phi$ on (jono)jatkuva avaruudesta C^∞ avaruuteen C^∞.

3. Jos $\lambda \in \mathcal{E}'$, niin kuvaus $\phi \mapsto \lambda * \phi$ on (jono)jatkuva avaruudesta C_0^∞ avaruuteen C_0^∞.

4. Olkoon $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $C^\infty(\mathbb{R}^n)$:n topologiassa

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-kh)\psi(kh)h^n = (\phi * \psi)(x)$$

toisin sanoen derivaatat suppenevat tasaisesti kompakteissa joukoissa.

5. Konvoluution laskusäännöt eivät enää yleisesti säily voimassa, jos useammalla konvoluoitavista distribuutioista on ei-kompakti kantaja. Totea tämä yksiulotteisessa tilanteessa assosiatiivisuuden kohdalla: tarkista, että

$$(u_1 * u_2) * u_3 \neq u_1 * (u_2 * u_3),$$

jos $u_1 \equiv 1$ (vakiofunktio), $u_2 = \delta'$ ja $u_3 = \chi_{[0,\infty)}$.