

Teknillinen korkeakoulu

Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia

Lassas/Helin

Harjoitus 5

Ti 15.10.2007 klo 16-18 U322

Huom. Tehtävissä Ω on \mathbb{R}^n :n avoin osajoukko.

1. Olkoon $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Näytä, että $\lambda \in \mathcal{E}'(\Omega)$ jos ja vain jos on olemassa kiinteä $K \subset\subset \Omega$ sekä vakiot C ja n , niin että kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pätee

$$|\lambda(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_K |\partial^\alpha \phi|.$$

2. Osoita, että joukko $C_0^\infty(\Omega)$ on (jono-)tiheä joukossa $C^\infty(\Omega)$ ja joukko $\mathcal{E}'(\Omega)$ on (jono-)tiheä joukossa $\mathcal{D}'(\Omega)$. [Opastus: konstruoi sopiva jono katkaisufunktioita $\psi_n \in C_0^\infty(\Omega)$, niin että jokaisella $K \subset\subset \Omega$ pätee $\psi_n|_K = 1$, kun n on kyllin suuri.]
3. Määritä kaikki distribuutiot $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, joille $x(1-x)\lambda = 0$. [Vihje: päättele ensin distribuution λ kantaja. Sovella sitten sopivasti luentojen korollaaria 1.39.]
4. Tarkastellaan sarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \delta_0^{(k)}$, missä $c_k \in \mathbb{C}$ ovat vakioita. Osoita, että sarja suppenee avaruudessa $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ jos ja vain jos ainoastaan äärellisen monta kertoimista c_k poikkeaa nolasta. Tee tämä soveltamalla luentojen korollaaria 1.39. [Opastus: totea korollaarin nojalla, että vasta oletus johtaa tilanteeseen, jossa samanlainen sarja suppenee nolnaan, mutta sen kaikki kertoimet eivät ole nolliä. Totea tämä mahdottomaksi testaamalla sopivalla polynomilla.]
5. Olkoon $K = \overline{B(0, 1)}$ suljettu yksikkökuula \mathbb{R}^n :ssä.
 - (i) Jos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ toteuttavat $\phi|_K = 0$ ja $\text{supp} \lambda \subset K$, niin silloin $\phi \lambda = 0$.
 - (ii) Totea, ettei (i)-kohdan väite pidä paikkaansa kaikille kompakteille joukoille K .