Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 4
Ti 9.10.2007 klo 16-18 U322

Huom. Tehtävissä Ω on $\mathbb{R}^n$:n avoin osajoukko.

1. (i) Todista luentojen lause 1.31: Olkoon $f_k \in L^1_{loc}(\Omega)$ ja $|f_k| \leq g$ kaikilla k, missä $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Silloin, jos $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ melkein kaikilla $x \in \Omega$, niin $f_k \to f$ myös avaruudessa $\mathcal{D}'(\Omega)$, kun $k \to \infty$. [Vihje: sopiva integraalien konvergenssilause.]

   (ii) Olkoon ρ^ϵ yksikön approksimaatio kuten luennoilla. Osoita, että $\rho^{\epsilon_n} \to \delta_0$, kun $n \to \infty$, kaikilla nollaan suppenevilla jonoilla (ϵ_n).

2. Osoita, että on olemassa sileä yksikön ositus koko reaaliakselilla vastaten (ääretöntä) avointa peitettä $\mathbb{R} = \cup_{n=-\infty}^{\infty}(n-1, n+1)$. Tarkemmin sanoen osoita, että on olemassa funktiot $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, joille $0 \leq \phi_j \leq 1$, $\mathrm{supp}\phi_j \subset (j-1, j+1), j \in \mathbb{Z}$, ja $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j = 1$ identtisesti $\mathbb{R}$:ssä. [Ehdotus: valitse $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ sopivasti, jotta voit määritellä $\phi_j(x) = \psi(x-j)/a(x)$, missä $a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(x-k)$.]

3. Olkoon f tyypillinen Weierstrassin ei-missään derivoituva funktio
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sin(4^k x).$$
Määritä distribuution f' aste.

4. Osoita, että jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, on olemassa $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $j = 1, 2, ...$, joille pätee: kaikilla kompakteille $K \subset \Omega$ on olemassa J siten, että $\phi_j|_K = 1$, kun $j > J$.

5. (Demo.) Olkoon τ topologia joukossa $\mathcal{D}'(\Omega)$, jonka virittävät joukot
$$U_{\phi,s} = \{\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \mathrm{Re}\langle \lambda, \phi \rangle < s\},$$
missä $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ja $s \in \mathbb{R}$. Osoita, että λ_j jonosuppenevat $\mathcal{D}'(\Omega)$:ssa, jos ne suppenevat topologiassa τ.