Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 3
Ti 2.10.2007 klo 16-18 U322

Huom. Tehtävissä Ω on $\mathbb{R}^n$:n avoin osajoukko.

1. Olkoon $g \in C^\infty(\Omega)$ ja $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tarkista, että distribuutioderivaatoille pätee $\partial_k(g\lambda) = (\partial_k g)\lambda + g\partial_k\lambda$, missä $k \in \{1, ..., n\}$.

2. Tarkastellaan distribuutioita reaaliakselilla. Luennoilla osoitettiin, että $x\delta_0 = 0$. Näytä, että $x\delta_0' = -\delta_0$.

3. Olkoon f kolmiofunktio

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{jos } |x| \le 1 \text{ ja} \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

   Laske distribuutioderivaatat f' ja f''.

4. (i) Olkoon distribuution $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ aste enintään $N < \infty$. Osoita, että distribuution $\partial^\alpha\lambda$ aste on enintään $N + |\alpha|$.

   (ii) Olkoon $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ja $\mathrm{supp}\lambda \subset\subset \Omega$. Osoita, että λ:n aste on äärellinen.

5. Totea, että jokaisessa avoimessa joukossa elää distribuutioita, joilla ei ole äärellistä astetta (sanomme, että silloin distribuution aste on ääretön). [Vihje: Summaa deltapiikkien derivaattoja $\delta_{x_k}^{(k)}$ sopivasti valitussa pistejonossa.]