Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 2
Ti 25.9.2007 klo 16-18 U322

1. Jos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, merkitään $A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}$. Osoita että $A + B$ on kompakti, jos joukot A ja B ovat kompakteja.

2. Olkoot $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ (tai $\in L^1(\mathbb{R}^n)$), joista ainakin toisen kantaja on kompakti. Osoita, että
$$\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp} g.$$

3. (i) Laske $\partial^\alpha x^\beta$, kun α, β ovat multi-indeksejä.
   (ii) Todista multinomikaava
$$(x_1 + ... + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha.$$
   [Opastus: Käytä hyväksesi havaintoa, jonka mukaan polynomi häviää identtisesti, jos sen jokainen osittaisderivaatta häviää origossa. Totea että oikean ja vasemman puolen lausekkeilla on samat derivaatat origossa.]

4. Todista (formaali) Taylorin kaava multi-indeksiformalismissa: jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, niin
$$f(x + h) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha,$$
kun $x, h \in \mathbb{R}^n$. [Ehdotus: Riittää tarkastella tapausta $x = 0$. Määrittele (yhden reaalimuuttujan funktio) g asettamalla $g(t) = f(th)$ ja huomaa, että luonnollisella tulkinnalla $g^{(k)}(t) = ((h_1\partial_1 + ... + h_n\partial_n)^k f)(th)$. Sovella multinomikaavaa (edellinen tehtävä) ja Taylorin kaavaa yksiulotteisessa tilanteessa, jonka voit olettaa tunnetuksi.]

5. (Demotehtävä.) Todista $\log|x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ja
$$\frac{d}{dx} \log|x| = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}.$$