Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 10
Ti 11.12.2007 klo 16-18 U322

1. Millä sileysindeksin s arvoilla funktio (tai distribuutio) f kuuluu Sobolev-avaruuteen $H^{s,2}(\mathbb{R})$, jos
   (i) $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$;
   (ii) $f(x) = 1$;
   (iii) $f = \delta_1$;
   (iv) $f(x) = \exp(-|x|^2/2)$?
2. Osoita, että $D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|,2}(\mathbb{R}^n)$ mikäli $u \in H^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.
3. Olkoon $s \in \mathbb{R}$. Totea, että jokainen rajoitettu funktio $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $T_b : H^{s,2}(\mathbb{R}^n) \to H^{s,2}(\mathbb{R}^n)$, missä $\widehat{(T_b f)}(\xi) = b(\xi)\hat{f}(\xi)$.
4. (i) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että kuvaus $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{a/2}\hat{f}(\xi))$ on isomorfismi $H^{s,2}(\mathbb{R}^n) \to H^{s-a,2}(\mathbb{R}^n)$.
   (ii) Olkoon $k > 0$ kokonaisluku. Osoita, että $f \in H^{-k,2}(\mathbb{R}^n)$ jos ja vain jos se voidaan kirjoittaa muotoon
   $$f = \sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha f_\alpha,$$
   missä $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $|\alpha| \le k$.
5. **Demo.** Osoita, että $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.