Mat-1.3430 Funktionaalianalyysin perusteet Harj. 9.
30.11.2007

1) Olkoon H Hilbert-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(H)$. Osoita, että pätee a) $\ker A = \ker (A^*A)$
b) $\overline{\operatorname{Im} A^*} = \overline{\operatorname{Im} A^*A}$

2) Olkoon H Hilbert-avaruus ja $U \in \mathcal{L}(H)$ unitaarinen. Osoita, että lineaarikuvaus $f: \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$, $f(A) = U^*AU$ on isometria.

3) Olkoon $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ $A(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$
a) Määrää $A^* \in \mathcal{L}(\ell^2)$.
b) Määrää $(A^*)^2$ ja osoita, että jos $|\mu| < 4$ niin μ on kuvauksen $(A^*)^2$ ominaisarvo.
c) Osoita, että $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 2\}$

4) Etsi operaattori $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ jolle $\sigma(A) = \{0\}$ mutta $A \neq 0$.

5) Olkoon H Hilbert-avaruus ja $y, z \in H$. Määritellään $A \in \mathcal{L}(H)$ asettamalla $Ax = (x|y)z$. Osoita, että A on kompakti

6) Olkoon X sisätuloavaruus ja $A, B \in \mathcal{L}(X)$ s.e. pätee $(Ax, x) = (Bx, x)$ $\forall x \in X$. Osoita:

a) $\forall x, y, u, v$: $4(u, y) = (u+v, x+y) - (u-v, x-y) + i(u+iv, x+iy) - i(u-iv, x-iy)$.

b) $A = B$.

1. Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus. Olkoon $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Osoitetaan, että

a) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^*A)$

b) $\overline{\operatorname{Im} A^*} = \overline{\operatorname{Im}(A^*A)}$

Tod. a) Olkoon $x \in \operatorname{Ker} A$. Tällöin

$$Ax = 0 \implies A^*Ax = A^*0 = 0$$

$$\implies x \in \operatorname{Ker} A^*A.$$

Olkoon nyt $x \in \operatorname{Ker} A^*A$.

Tällöin

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^*Ax \rangle$$

$$= \langle x, 0 \rangle = 0$$

$$\implies Ax = 0.$$

Siis $x \in \operatorname{Ker} A$.

b) Lause 5.11 b) $\implies$ jos $B \subset \mathcal{H}$, niin $B^{\perp\perp} = \overline{B}$.

$$\overline{\operatorname{Im} A^*} = (\operatorname{Im} A^*)^{\perp\perp} = (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = (\operatorname{Ker} A^*A)^{\perp}$$

$$= (\operatorname{Im}(A^*A)^*)^{\perp\perp} = (\operatorname{Im}(A^*A))^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} A^*A}.$$

$\square$

2. Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja

$U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, unitaarinen. Osoita,

että $f: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

$$f(A) = U^* A U$$

on isometria.

<u>Tod.</u> U on unitaarinen, joten

$$U^*U = UU^* = I, \quad \|U\| = \|U^*\| = 1.$$

Osoitetaan, että f on jatkuva:

$$\|f(A)\| = \|U^*AU\| \leq \|U^*\| \|A\| \|U\|$$
$$= \|A\|.$$

Olkoon $g: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $g(A) = UAU^*$.

Nyt $g(f(A)) = A$, joten $f^{-1} = g$.

Osoitetaan g jatkuvaksi:

$$\|g(A)\| = \|UAU^*\| \leq \|A\|,$$

kuten edellä. Siis f ja g rajoitettuja

ja lineaarisina siis jatkuvia.

<u>Isometria:</u> $\|A\| = \|UU^*AUU^*\| \leq \|U\| \|U^*AU\| \|U^*\|$

$$= \|U^*AU\| = \|f(A)\|$$

$$\Rightarrow \quad \|f(A)\| = \|A\|$$

$\square$

3. a) Mikä on $A^* \in \mathcal{L}(\ell^2)$

Olkoon $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$,

$z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} := A^* y$. Lasketaan z!

Huom! $(Ax, y) = (x, A^* y) = (x, z)$.

Siis:

$$(Ax, y) = 4x_1 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_3} + x_3 \overline{y_4} + \dots$$

$$= x_1 \overline{z_1} + x_2 \overline{z_2} + \dots$$

$$= (x, z)$$

Valitaan $z_1 = 4y_2$, $z_2 = y_3$, $z_3 = 4y_4$, ...

Avataan $A^* y = (4y_2, y_3, 4y_4, y_5, \dots)$.

Koska A^* on ylhäisriittävä, niin

tehtävä on ratkaistu.

b) $A^* A^* y = (4y_3, 4y_5, 4y_6, \dots)$.

Olkoon $\mu \in \mathbb{C}$ s.e. $|\mu| < 4$. Nyt

haluamme että $(A^*)^2 x = \mu x$, jollakin

$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Tälle x pätee

$$4x_{n+2} = \mu x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tälle saadaan ratkaisuksi esimerkiksi

$$x_1 = x_2 = 1,$$

$$x_{2n-1} = x_{2n} = \left(\frac{\mu}{4}\right)^{n-1}, \text{ kun } n \geq 2.$$

Nyt $x \neq 0$ ja

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_{2n-1}|^2 + |x_{2n}|^2\right)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{|\mu|}{4}\right)^{n-1}\right)^2$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\mu|}{4}\right)^{2n-2} < \infty,$$

koska $|\mu| < 4$. Näin ollen $x \in l^2$ ja μ on ominaisarvo.

2) Huom! $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$

Tämän nojalla (ja edellisen kohdan)

$$\{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 4\} \subseteq \sigma(A^2).$$

Kuitenkin

$$\{\lambda \mid |\lambda| < 4\} = \{\bar{\lambda} \mid |\lambda| < 4\},$$

joten $\{\lambda \mid |\lambda| < 4\} \subset \sigma(A^2)$.

Spektri on suljettu, joten $\{\lambda \mid |\lambda| \leq 4\} \subset \sigma(A^2)$.

Mutta silloin $\{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\} \subseteq \sigma(A)$.

(Perustelu: jos $|\lambda| \leq 2$, niin polynomilauseen nojalla $\lambda \in \sigma(A)$, muutoin $\lambda^2 \notin \sigma(A^2)$, jolloin $|\lambda|^2 > 4$, mikä on ristiriita.)

Osoitetaan nyt, että $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\}$.

Olkoon $\lambda \in \sigma(A)$. Tällöin $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$.

Olkoon $v \in \ell^2$ s.e. $\lambda v = Av$. Tällöin

$$|\lambda|^2 = \frac{\|\lambda^2 v\|}{\|v\|} = \frac{\|A^2 v\|}{\|v\|} \leq \|A^2\| = 4,$$

joten $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\}$. $\square$

4. Etsi $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ s.e. $\sigma(A) = \{0\}$, mutta $A \neq 0$.

Ratkaisu: Olkoon $Ax = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots)$.

A siis siirtää oikealle ja hävittää joka toisen alkion. Nyt $A^2 x = 0$.

A on rajoitettu, koska $\|Ax\| \leq \|x\|$.

Nyt jos $\lambda \in \sigma(A)$, niin $\lambda^2 \in \sigma(A^2) = \sigma(0) = \{0\}$.

Toisaalta $A(0,1,0,0,0,\ldots) = 0$, joten $0 \in \sigma(A)$.

$\square$

5. Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $y, z \in \mathcal{H}$.
Olkoon $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ s.e. kun $x \in \mathcal{H}$,

$$Ax = (x|y)\, z \, .$$

Osoita, että A on kompakti.

Tod. A on lineaarinen ja rajoitettu:

$$\|Ax\| = \|(x|y)\, z\|$$

$$= |(x|y)|\ \|z\|$$

Cauchy-Schwarz $\leq \|x\|\ \|y\|\ \|z\|$

$$\Rightarrow \quad \|A\| \leq \|y\|\ \|z\| \, ,$$

Nyt $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{sp}(z)$ tai $\mathrm{Im}(A) = \{0\}$.
Tällöin $\dim(\mathrm{Im}(A)) < \infty$,
joten A on kompakti.

6. a) $$4(u,y) \overset{?}{=} (u+v, x+y) - (u-v, x-y) + i(u+iv, x+iy) - i(u-iv, x-iy).$$

<u>Tod.</u>

$$(u+v, x+y) - (u-v, x-y) + i(u+iv, x+iy) - i(u-iv, x-iy)$$

$$= (u, x+y) + (v, x+y) - (u, x-y) + (v, x-y) + i(u, x+iy) - (v, x+iy) - i(u, x-iy) - (v, x-iy)$$

$$= (u,x) + (u,y) + (v,x) + (v,y) - (u,x) + (u,y) + (v,x) - (v,y) + i(u,x) + \underbrace{i\cdot\bar{i}}_{=+1}(u,y) - (v,x) + i(v,y) - i(u,x) + (u,y) - (v,x) - i(v,y)$$

$$= 4(u,y).$$

b) $$(Ax, x) = (Bx, x) \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Onko $A = B$? On!

<u>Tod.</u> Käytetään (a)-kohtaa. Asetetaan $u = Ax$, $v = Ay$, jolloin

$$4(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy)$$

Mutta oletuksen mukaan tämä on

$$= (B(x+y), x+y) - (B(x-y), x-y)$$
$$+ i(B(x+iy), x+iy) - i(B(x-iy), x-iy)$$

$$= 4(Bx, y).$$

Siis $(Ax,x) = (Bx,x)$ antaa

$$(Ax,y) = (Bx,y) \quad \forall x,y \in \mathcal{H}.$$

Mutta silloin $Ax = Bx \quad \forall x \in \mathcal{H}$, sillä

$$(Ax,y) = (Bx,y) \quad \forall x,y \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \quad (Ax - Bx, y) = 0 \quad \forall x,y \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \quad (Ax - Bx, Ax - Bx) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \quad \|Ax - Bx\|^2 = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \quad Ax - Bx = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \quad Ax = Bx \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

$\square$