Mat-1.3430 Funktionaalianalyysin perusteet Harj. 8.
23.11.200

Peltonen / Aalto

1) Olkoot $\mathbb{Y}$ normiavaruus, H Hilbertin avaruus, $M \subset H$ suljettu vektorialiavaruus ja $A \in \mathcal{L}(M, \mathbb{Y})$. Osoita, että löytyy $A_1 \in \mathcal{L}(H, \mathbb{Y})$ siten, että pätee $Ax = A_1 x \quad \forall x \in M$ ja $\|A\| = \|A_1\|$.

2) Olkoon $\mathbb{X}$ äärellisulotteinen vektoriavaruus. Osoita, että pätee $\mathbb{X}^{**} = \mathbb{X}$.

3) Olkoon $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineaarinen kuvaus ja (a_{ij}) sen esitysmatriisi standardikantojen suhteen.

a) Osoita, että jos $\mathbb{R}^m$ ja $\mathbb{R}^n$ varustetaan normilla $\|(t_i)\|_1 = \sum |t_i|$, niin

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(sarakesummanormi)}$$

b) Osoita, että jos $\mathbb{R}^m$ ja $\mathbb{R}^n$ varustetaan normilla $\|(t_i)\|_\infty = \max |t_i|$, niin

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{(rivisummanormi)}$$

4) Kuvaus $f: \ell^p \to \mathbb{K}$ $(1 < p < \infty)$, joka määräytyy ehdosta $f(x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = x_1 - x_2 + 10x_8$, on jatkuva lineaarikuvaus eli $(\ell^p)'$:n alkio. Mikä ℓ^q:n alkio vastaa funktiota f samastuksessa $(\ell^p)' = \ell^q$? Määrää f:n duaalinormi.

5) Olkoon $c = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \exists \lim_{k \to \infty} x_k\}$ ja $c_0 = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \lim_{k \to \infty} x_k = 0\}$, $c, c_0 \subset (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Osoita, että kuvaus

$$A: (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \longmapsto (x_{k+1} + x_1)_{k \in \mathbb{N}}$$

on lineaarinen isomorfismi $c_0 \to c$.

1. Olkoot $\underline{Y}$ normiavaruus, $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $M \subset \mathcal{H}$ suljettu aliavaruus, $A \in \mathcal{L}(M, \underline{Y})$. Osoita, että löytyy $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \underline{Y})$ siten, että

$$Ax = A_1 x \quad \forall x \in M$$

$$\|A\| = \|A_1\| .$$

Tod. Lauseen 5.14. nojalla

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$$

ja lisäksi on projektio $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ s.e. $P_M(\mathcal{H}) = M$ ja

$$\| P_M x \| \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H} .$$

Olkoon $A_1 x = A P_M x$, kun $x \in \mathcal{H}$.

Nyt jos $x \in M$, niin $P_M x = x$ ja

$$Ax = A P_M x = A_1 x .$$

Toisaalta

$$\|A_1 x\| = \| A P_M x\| \leq \|A\| \|P_M x\| \leq \|A\| \|x\| .$$

Nyt siis

$$\frac{\|A_1 x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Olkoon nyt $x \in M$. Tällöin

$$\|Ax\| = \|A P_M x\| = \|A_1 x\| \leq \|A_1\| \, \|x\|.$$

Näin ollen $\|A_1\| = \|A\|$. □

2. Olkoon X äärellisulotteinen vektoriavaruus. Osoita, että pätee $X^{**} = X$.

Tod. Ks. Kreyszig ss. 106–116..

Tarkastellaan kanonista upotusta

$$\mathcal{C} : X \to X^{**},$$

missä

$$x \mapsto \underbrace{(\underset{\in X^*}{f} \mapsto \underset{\in \mathbb{K}}{f(x)})}_{\in X^{**}}.$$

Tällöin $\mathcal{C}(X) \subset X^{**}$ ja on osoitettava, että $X^{**} \subset \mathcal{C}(X)$.

$\mathcal{C}$ on lineaarinen. Osoitetaan, että $\mathcal{C}$ on injektio.

Osoitetaan, että $\mathcal{C}x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Tod. Oletetaan, että $\mathcal{C}x = 0$. Tällöin

$$\mathcal{C}x(f) = 0 \quad \forall f \in X^*.$$

Siis $f(x) = 0 \quad \forall f \in X^*$.

Toisin sanoen: ~~[illegible]~~

Olkoon $\dim(X) = n$. Olkoon $\{e_i\}_{i=1}^n$

X:n kanta s.e. $\operatorname{span}(\{e_i\}_{i=1}^n) = X$.

Nyt $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, joillekin

$\alpha_i \in K$. Siis

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = 0$$

kaikille $f \in X^*$. Erityisesti

$f_i(y) := \beta_i$, missä $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$

antaa $f_i(x) = \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

Siis $x = 0$, mikä oli osoitettava.

Lemma $\dim(X^*) = \dim(X)$.

Tod. Olkoon $\{e_j\}_{j=1}^n$ X:n kanta. Olkoon $I:$

$X^* \to \mathbb{K}^n$, $f \mapsto (f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Nyt I on bijektio ja näin

$\dim(\mathbb{K}^n) = \dim(X^*) = \dim(X)$. $\square$

Lopulta päättelemme:

$\mathcal{C}(\mathbb{X})$ on $\mathbb{X}^{**}$:n vektori-

aliavaruus, ja koska $\mathcal{C}$ on injektio,

niin se on kuvansa kanssa bijektio:

$$\mathcal{C}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{X} \to \mathcal{C}(\mathbb{X}),$$

jolloin $\dim(\mathcal{C}(\mathbb{X})) \geq n$.

Kuitenkin $\dim(\mathbb{X}^{**}) = \dim(\mathbb{X}^{*}) = \dim(\mathbb{X})$,

joten $\dim(\mathcal{C}(\mathbb{X})) = \dim(\mathbb{X}^{**})$. Koska

$\mathcal{C}(\mathbb{X})$ on v.a.a. on $\mathcal{C}(\mathbb{X}) = \mathbb{X}^{**}$. $\square$

3. Olkoon $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})$.

Tarkastellaan normeja

$$\|(t_i)\|_1 = \sum |t_i|,$$

$$\|(t_i)\|_\infty = \max |t_i|,$$

$$\|A\|_s = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_r = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$$

a) Olkoon $x \in \mathbb{R}^m$. Merkitään $x = (t_j)_{j=1}^m$.

$$\|Ax\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^m a_{ij} t_j \right\|_1$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} t_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |t_j|$$

$$= \sum_{j=1}^m |t_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\leq \sum_{j=1}^m |t_j| \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

$$= \|x\|_1 \, \|A\|_s$$

Olkoon nyt $j_0 \in \{1,2,\dots,m\}$ s.e.

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| .$$

Nyt valitsemalla $x_0 = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

$\uparrow$ j_0:s alkio

saadaan $\|Ax_0\| = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$. Näin

ollen $\|A\| = \|A\|_s$.

b) Vastaavasti, olkoon $x \in \mathbb{R}^m$.

$$\|Ax\|_\infty = \Big\| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j \Big\|_\infty$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \Big| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j \Big|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| |t_j|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \left(\max_{1 \le k \le m} |t_k| \right)$$

$$= \|A\|_r \, \|x\|_\infty$$

Olkoon $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ siten, että

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| .$$

Valitaan $x_0 = \left(\frac{a_{i_0 j}}{|a_{i_0 j}|} \right)_{j=1}^{m}$. Nyt

$$\|Ax_0\| = \Big\| \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \Big\|_\infty$$

$$= \|A_r\| \cdot \|x_0\| .$$

Näin ollen $\|A\| = \|A_r\|$.

$\square$

4. Olkoon $f : \ell^p \to \mathbb{K}$, $(1 < p < \infty)$

$$f(x) = x_1 - x_2 + 10\, x_8 .$$

Nyt $f \in (\ell^p)'$. Mikä alkio vastaa funktiota f samastuksessa $(\ell^p)' = \ell^q$?

Etsi f:n duaalinormi.

Olkoon $y = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 0, 0, \dots) \in \ell^q$.

Nyt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \forall x \in \ell^p$.

Siis y vastaa f:ää samastuksessa $(\ell^p)' = \ell^q$.

Duaalinormi:

$$\|f\|_{(\ell^p)'} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| =$$

$$= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \ell^p}} |x_1 - x_2 + 10\, x_8| = ?$$

Tiedetään, että $\|f\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_{\ell^q} = (1^q + 1^q + 10^q)^{1/q}$

$$= (2 + 10^q)^{1/q} .$$

5. $c = \{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \exists \lim_{k \to \infty} x_k \}$

$c_0 = \{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \exists \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \}$,

$c, c_0 \subset \ell^\infty$. Osoita, että

$$A : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (x_{k+1} + x_1)_{k \in \mathbb{N}}$$

on lineaarinen isomorfismi, $c_0 \to c$.

Esimerkki $x = (1, 0, 0, \dots) \in c_0$

$Ax = (1, 1, 1, \dots) \in c \setminus c_0$???

Tulkitaan uudelleen! Olkoon

$y \in c_0$ s.e. $y = Ax$. Tällöin

$x_1 = 0$, joten $x = (0, y_1, y_2, \dots)$.

Nyt isomorfia on intuitiivisesti selvä.

Tod. A on lineaarinen, sillä

$$A(\alpha x + y) = (\alpha x_{k+1} + \alpha x_1 + y_{k+1} + y_1)_{k \in \mathbb{N}}$$
$$= \alpha Ax + Ay .$$

Osoitetaan A bijektioksi.

A injektio

$$Ax = 0 \Rightarrow x_{k+1} + x_1 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x = (\alpha, -\alpha, -\alpha, \dots),$$

jollekin $\alpha \in \mathbb{R}$. Kuitenkin

$\lim_{k \to \infty} x_k = 0$, joten $\alpha = 0$.

Tällöin $x = 0$, jolloin A injektio.

A surjektio

Olkoon $y \in c$. Olkoon $\bar{y} = \lim_{k \to \infty} y_k$.

Olkoon $x := (\bar{y}, y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots)$

Nyt $x \in c_0$ ja $Ax = y$.

A ~~isometria~~ homeomorfismi

1) $$\|Ax\|_\infty \leq |x_1| + \|x\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$$

2) $$\|A^{-1}x\|_\infty = \|(x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots)\|_\infty = \|x\|_\infty + |\bar{x}| \leq 2\|x\|_\infty.$$

$\square$