Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet Harj. 7.

Peltonen / Aalto 16.11.2007

1) Osoita, että jos X ja Y ovat normiavaruuksia ja $A: X \to Y$ avoin lineaarikuvaus, niin A on surjektio.

2) Etsi epäjatkuva kuvaus $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka graafi $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on suljettu.

3) Olkoon X vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sen normeja s.e. $(X, \|\cdot\|_i)$ on Banach-avaruus kun $i = 1, 2$. Oletetaan, että löytyy $C > 0$ s.e. pätee $\|x\|_1 \leq C \|x\|_2$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentit.

4) Olkoon X Banach-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen kuvaus $X \to X$ s.e. $\|A\| < 1$. Osoita että operaattori $I + A$ on kääntyvä ja $(I+A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$ on normisuppeneva sarja s.e. $\|(I+A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

5) Olkoon X Banach-avaruus ja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jono kääntyviä operaattoreita $A_n \in \mathcal{L}(X)$ $n \in \mathbb{N}$ s.e. $A_n \to A \in \mathcal{L}(X)$ kun $n \to \infty$. Olkoot $\|A_n^{-1}\| < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Osoita, että A on kääntyvä.

6) Olkoon X Banach-avaruus ja $B, B^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Osoita että jos $A \in \mathcal{L}(X)$ ja $\|A - B\| < 1/\|B^{-1}\|$ niin A on kääntyvä ja pätee
$$\|A^{-1} - B^{-1}\| < \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|A-B\|\|B^{-1}\|}.$$

(Vihje: $A = ((A-B)B^{-1} + I)B$.)

Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

7. Harjoitus

1. Olkoot X, Y normiavaruuksia ja

$A : X \to Y$ avoin lineaarikuvaus.

Osoita, että A on surjektio.

Tod. Osoitetaan, että kaikille $y \in Y$

on alkukuva $x \in X$, eli $Ax = y$.

Olkoon $y \in Y$ mielivaltainen.

Olkoon
$$U = A(B_X(0,1)) = \{Ax : x \in B_X(0,1)\} = \{Ax : \|x\|_X < 1\}.$$

U on avoin ja $0_Y \in U$, sillä

$$\cancel{0 = 0 \cdot A0 = A(0 \cdot 0) = A0}$$

$$A0_X = A(2 \cdot 0_X) = 2A0_X \Rightarrow A0_X = 0_Y.$$

Koska U on avoin on olemassa $\delta > 0$

s.e. $B_Y(0,\delta) \subset U$. Olkoon nyt $x_\delta \in X$

s.e. $Ax_\delta = \frac{\delta}{2\|y\|} y$. Tällöin x_δ

on olemassa, sillä

$$\frac{\delta}{2\|y\|} y \in B_{\mathbb{Y}}(0, \delta) \subset U = A(B_{\mathbb{X}}(0,1)).$$

Olkoon nyt $x = \frac{2\|y\|}{\delta} x_\delta$. Selvästi

$x \in \mathbb{X}$, sillä $\mathbb{X}$ on normiavaruus.

Toisaalta

$$Ax = A\left(\frac{2\|y\|}{\delta} x_\delta\right) = \frac{2\|y\|}{\delta} Ax_\delta$$

$$= \frac{2\|y\|}{\delta} \frac{\delta}{2\|y\|} y = y.$$

Näin kaikilla $y \in Y$ on alkukuva ja

A on surjektio. $\square$

2. Olkoon $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ määritelty paloittain

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \end{cases}.$$

Funktio f ei ole jatkuva origossa.

Graafi on kuitenkin suljettu, sillä

$G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 = 0\} \cup \{(0,0)\}.$

3. Käytetään avoimen kuvauksen lausetta.

Tarkastellaan kuvausta

$$A : (\underline{X}, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\underline{X}, \|\cdot\|_1)$$

$$x \longmapsto x \; .$$

A on rajoitettu, sillä

$$\|Ax\|_1 = \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \; .$$

Lisäksi A on lineaarinen, joten $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. A on myös surjektio. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla A on avoin. Erityisesti siis A^{-1} on jatkuva. Näin ollen kaikilla $x \in (\underline{X}, \|\cdot\|_1)$

$$\|x\|_2 = \|A^{-1}x\|_2 \leq M\|x\|_1 \; ,$$

missä $M > 0$, sillä A^{-1} on rajoitettu.

□

4. Määritellään kuvaus $B : X \to X$,

$$Bx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n x,$$

mikäli summa suppenee. Nyt

$$\begin{aligned}
\| Bx \| &= \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n x \Big\| \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\| \\
&\le \|x\| \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n \\
&= \|x\| \frac{1}{1 - \|A\|},
\end{aligned}$$

koska $\|A\| < 1$. Siis

$$\|B\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Osoitetaan, että summa suppenee:

Osoitetaan, että $y_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n A^n x$

on Cauchy kaikilla x. Olkoon $\varepsilon > 0$, $x \in X$.

Valitaan $N = \lfloor \log_{\|A\|}((1 - \|A\|) \varepsilon \|x\|^{-1}) \rfloor + 1$.

Kun $k, m \ge N$, niin

$$\| y_k - y_m \| \leq \sum_{n=\min(k,m)}^{\max(k,m)} \|A\|^n \|x\|$$

$$\leq \sum_{n=N}^{\infty} \|A\|^n \|x\|$$

$$= \|A\|^N \frac{1}{1-\|A\|} \|x\|$$

$$\leq \|A\|^{\log_{\|A\|}((1-\|A\|)\varepsilon \|x\|^{-1})} \frac{1}{1-\|A\|} \|x\|$$

$$= (1-\|A\|)\varepsilon \|x\|^{-1} \frac{1}{1-\|A\|} \|x\|$$

$$= \varepsilon .$$

Lopuksi näytetään, että $B(I+A) = I$.

Tod. Olkoon $x \in \overline{X}$. Nyt

$$B(I+A)x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n (I+A)x$$

$$= x + Ax - (Ax + A^2 x) + \ldots$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(x + (-1)^k A^{k+1} x \right)$$

$$= x ,$$

sillä $\lim_{k\to\infty} \| (-1)^k A^{k+1} x \| \leq \lim_{k\to\infty} \|A\|^k \|x\| = 0$.

5. Koska $A_n \to A$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ s.e. $\| A_N - A \| < 1$.

Olkoon $B = I - A_n^{-1} A$. Nyt

$$\begin{aligned} \|B\| &= \| I - A_N^{-1} A \| \\ &= \| A_N^{-1} (A_N - A) \| \\ &\leq \| A_N^{-1} \| \, \| A_N - A \| \\ &< 1 , \end{aligned}$$

joten edellisen tehtävän nojalla $I - B$ kääntyvä. Tällöin siis $I - B = A_N^{-1} A$ on kääntyvä.

Koska $A = A_N A_N^{-1} A$ on kahden kääntyvän operaattorin yhdiste, niin A on kääntyvä ja

$$A^{-1} = (A_N^{-1} A)^{-1} A_N^{-1} .$$

6. Sovelletaan jälleen tehtävää 4.

Nyt

$$\|(A-B)B^{-1}\|$$

$$\leq \|A-B\|\,\|B^{-1}\|$$

$$< 1,$$

joten $I + (A-B)B^{-1}$ on kääntyvä. Siis AB^{-1} on kääntyvä ja $A = (AB^{-1})B$ on kääntyvä:

$$A((AB^{-1})B)^{-1} = AB^{-1}(AB^{-1})^{-1} = (AB^{-1})(AB^{-1})^{-1} = I$$

Lisäksi

$$\|(I + (A-B)B^{-1})^{-1}\| \leq (1 - \|(A-B)B^{-1}\|)^{-1}.$$

Nyt

$$\frac{1}{1 - \|(A-B)B^{-1}\|} \leq \frac{1}{1 - \|A-B\|\,\|B^{-1}\|}$$

ja

$$\|A^{-1}\| = \|B^{-1}((A-B)B^{-1} + I)^{-1}\|$$

$$\leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|A-B\|\,\|B^{-1}\|},$$

jolloin

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| = \|A^{-1}(B-A)B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|B-A\|\,\|B^{-1}\|$$

$$< \|A^{-1}\|.$$

$\square$