Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet
Pellonen / Aalto

Harj. (4.)
12.10.2007

1) Olkoon $w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ jono kompleksilukuja.
Määritellään operaattori $D_w : \ell^2 \to \ell^2$ asettamalla
$D_w x = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots)$. Osoita, että $D_w$ on jatkuva
jos ja vain jos $\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j| \le M < \infty$.
Osoita, että jos $D_w$ on jatkuva niin $\|D_w\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j|$.

2) Ol. $D_w : \ell^2 \to \ell^2$ kuten edellisessä tehtävässä ja $\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j| \le M < \infty$
Osoita, että $D_w$ on kääntyvä jos ja vain jos $\inf_{j \in \mathbb{N}} |w_j| > 0$.
Määrää kuvauksen $D_w^{-1}$ lauseke.

3) Ol. $D_w$ kuten yllä ja $\inf_{j \in \mathbb{N}} |w_j| > 0$, $\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j| \le M < \infty$.
Mitkä seuraavista yhtälöistä / epäyhtälöistä pätevät kaikilla
tällaisilla $w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$?

a) $\|D_w\| = \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$ b) $\|D_w\| \ge \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$ c) $\|D_w\| \le \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$

d) $\|D_w\| < \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$ e) $\|D_w\| > \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$.

4) Olkoot $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ ja $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$, $z \in \ell^r$ ja

$xyz := (x_j y_j z_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Osoita, että $xyz \in \ell^1$ ja
$\|xyz\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q \|z\|_r$. (Vihje: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} =: \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{q/s} + \frac{1}{r/s} = 1$)

5) Olkoon $p \in (1, \infty)$ $x^1, x^2 \in \ell^p$ tai $L^p$ s.e. $\|x^i\|_p = 1$
$i = 1, 2$. a) Osoita, että pätee:

$$\left\| \frac{x^1 + x^2}{2} \right\|_p = 1 \implies x^1 = x^2 \qquad \text{(aito konveksius)}.$$

Mitä tämä tarkoittaa yksikkökuulan muodolle?

b) Totea, että seuraavat avaruudet eivät ole
aidosti konvekseja: $\ell^1$, $\ell^\infty$, $c_0$, $C[0,1]$, $L^1[0,1]$.

1. Olkoon $w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ jono kompleksilukuja.

Olkoon $\mathcal{D}_w : l^2 \to l^2$ s.e.

$$\mathcal{D}_w x = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots)$$

Osoitetaan, että $\mathcal{D}_w$ on jatkuva joss

$w \in l^\infty$.

Tod. Monisteen lauseen 4.3. mukaan lineaarinen operaattori on jatkuva, joss se on rajoitettu. $\mathcal{D}_w$ on lineaarinen, sillä kaikilla $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in l^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_w(\alpha x + y) &= (w_1(\alpha x_1 + y_1), w_2(\alpha x_2 + y_2), \dots) \\ &= \alpha (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots) + (w_1 y_1, \dots) \\ &= \alpha \mathcal{D}_w x + \mathcal{D}_w y . \end{aligned}$$

Osoitetaan ehto $w \in l^\infty$ ensin riittäväksi.

Olkoon $w \in l^\infty$. Tällöin kaikille $x \in l^2$:

$$\begin{aligned} \| \mathcal{D}_w x \|_{l^2} &= \| (w_1 x_1, \dots) \|_{l^2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} |w_i x_i|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \| w \|_{l^\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= \| w \|_{l^\infty} \| x \|_{l^2} . \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten ehdon välttämättömyys. (Suorakin todistus!)
(Katso liite)

Oletetaan, että $w \notin \ell^\infty$.

Valitaan jonosta $(w_k)_{k=1}^\infty$ osajono

siten, että kaikilla $i = 1, 2, \ldots$

$$|w_{k_i}| \geq 2^i$$

ja $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$

Tämä on mahdollista, sillä muutoin eräälle

$i_0 \in \mathbb{N}$ olisi $|w_{i_0}| \leq 2^{i_0}$ kaikille $i \geq i_0$.

Olkoon nyt

$$x_j = \begin{cases} w_{k_i}^{-1} = \dfrac{\overline{w_{i_k}}}{|w_{i_k}|^2}, & \text{kun } j = k_i \\ 0, & \text{kun } j \neq k_i \end{cases}$$

Tällöin $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell^2$, sillä

$$\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^\infty |w_{k_i}^{-1}|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^\infty 2^{-2i}\right)^{1/2} = \left(\frac{1/4}{1-1/4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \infty.$$

Kuitenkin

$$\|D_w x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{j=1}^\infty |w_j x_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^\infty |w_{k_j} w_{k_j}^{-1}|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^\infty 1\right)^{1/2} = \infty.$$

Tällöin

$$\|D_w\| \geq \frac{\|D_w x\|_{\ell^2}}{\|x\|_{\ell^2}} = \infty ,$$

mikä osoittaa operaattorin $D_w$ rajoittamattomuuden.

Tämä todistaa väitteen. $\square$

2. Oletetaan nyt lisäksi, että $\inf_{j \in \mathbb{N}} |w_j| > 0$.

Tällöin $w^{-1} := (w_j^{-1})_{j=1}^{\infty} \in \ell^\infty$.

Nyt kaikille $x \in \ell^2$:

$$\begin{aligned} D_{w^{-1}} D_w x &= D_{w^{-1}} (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots) \\ &= (w_1^{-1} w_1 x_1, w_2^{-1} w_2 x_2, \dots) \\ &= (x_1, x_2, \dots) \\ &= x , \end{aligned}$$

$$D_w D_{w^{-1}} x = (w_1 w_1^{-1} x_1, w_2 w_2^{-1} x_2, \dots) = x ,$$

joten $D_{w^{-1}}$ on operaattorin $D_w$ käänteisoperaattori:

$$D_w^{-1} = D_{w^{-1}} .$$

Oletetaan sitten, että $\inf_{j \in \mathbb{N}} |w_j| = 0$.

~~Katso myös liite A.~~

Osoitetaan, että on olemassa $y \in \ell^2$ s.e. millekään $x \in \ell^2$ ei ole $D_w x = y$.

H4 (4)

Oletetaan ensin, että jollekin $k_0 \in \mathbb{N}$

$w_{k_0} = 0$. Tällöin valitsemalle $y$ s.e.

$$y_k = \begin{cases} 0, & \text{kun } k \neq k_0 \\ 1, & \text{kun } k = k_0 \end{cases}$$

saadaan kaikille $x \in \ell^2$:

$$\| D_w x - y \|_{\ell^2} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} | w_k x_k - y_k |^2 \right)^{2}$$

$$\geq \left( | w_{k_0} x_{k_0} - y_{k_0} |^2 \right)^{1/2}$$

$$= 1 .$$

Siis $y \in \ell^2$ ei kuulu operaattorin $D_w$

kuvaan, joten $D_w$ ei ole bijektio

eikä siis kääntyvä.

Oletetaan nyt, että $w_k \neq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Valitaan jono $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ s.e.

$$| w_{k_i} | \leq 2^{-2i} .$$

Olkoon $y \in \ell^2$, $y_k = \begin{cases} 2^{-i}, & \text{kun } k = k_i, \text{ jollekin } i \in \\ 0, & \text{muulloin}. \end{cases}$

Olkoon $x \in \ell^2$ mielivaltainen. Merkitään ~~...~~,

$K = \{ k_N, k_{N+1}, \dots \} \subset \mathbb{N}$, missä $N \in \mathbb{N}$ on valittu

siten, että $\| x \|_{\ell^2} \leq 2^{N+2}$.

Tallin

$$\|D_w x - y\|_{\ell^2} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |w_k x_k - y_k|^2\Big)^{1/2}$$

$$\geq \Big(\sum_{k\in K} |w_k x_k - y_k|^2\Big)^{1/2}$$

Minkowski

$$\geq \Big(\sum_{k\in K} |y_k|^2\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{k\in K} |w_k x_k|^2\Big)^{1/2}$$

$$\geq \Big(\sum_{k\in K} |y_k|^2\Big)^{1/2} - \|x\|_\infty \Big(\sum_{k\in K} |w_k|^2\Big)^{1/2}$$

$$\geq \Big(\sum_{k\in K} |y_k|^2\Big)^{1/2} - \|x\|_2 \Big(\sum_{i=N}^{\infty} 2^{-4i}\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(\sum_{i=N}^{\infty} 2^{-2i}\Big)^{1/2} - \|x\|_2 \Big(\sum_{i=N}^{\infty} 2^{-4i}\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(2^{-2N} \frac{1}{1-1/4}\Big)^{1/2} - \|x\|_2 \Big(2^{-4N} \frac{1}{1-1/16}\Big)^{1/2}$$

$$= 2^{-N}\sqrt{\tfrac{4}{3}} - \|x\|_2\, 2^{-2N}\sqrt{\tfrac{16}{15}}$$

$$\geq 2^{-N} - \|x\|_2\, 2^{-2N}\cdot 2$$

$$= 2^{-N}\big(1 - 2^{-N-1}\|x\|_2\big)$$

$$\geq 2^{-N}\big(1 - \tfrac{1}{2}\big)$$

$$= 2^{-N-1} > 0.$$

Nyt on siis näytetty, että eräille $y$,

joka riippuu vain painosta $w$, ~~[illegible]~~

mikään $x$ ei kuvaudu $y$:ksi. Siis

$D_w$ ei ole surjektio eikä siis

bijektio. Näin ollen $D_w^{-1}$ ei ole

olemassa. $\square$

Osoitetaan vielä lopuksi, että jos

$D_w$ on jatkuva, niin

$$\|D_w\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_j|.$$

Tod. Olkoon $\{j_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ jono s.e.

$$\lim_{k\to\infty} |w_{j_k}| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_j|.$$

Olkoon $x_k = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{j_k-1 \text{ kpl}}, 1, \underbrace{0,\dots}_{\text{loput nollia}})$.

$j_k$:s termi.

Tällöin $\|D_w\| \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\|D_w x_k\|}{\|x_k\|} = \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_j|$.

Toisaalta ensimmäisen tehtävän ensimmäisen kohdan nojalla

$\|D_w x\|_{\ell^2} \leq \|w\|_\infty \|x\|_{\ell^2}$,

joten $\|D_w\| = \|w\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_j|$.

3. Oletetaan, että on olemassa $m, M > 0$,

s.e.

$$0 < m = \inf_j |w_j| \leq \sup_j |w_j| \leq M < \infty .$$

Aiemman nojalla

$$\|D_w\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j|$$

$$\frac{1}{\|D_w^{-1}\|} = \frac{1}{\|D_{w^{-1}}\|} = \frac{1}{\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j|^{-1}} = \inf_{j \in \mathbb{N}} |w_j| .$$

Olkoon $x \in \ell^2$. Tällöin

$$\frac{\|D_w x\|}{\|x\|} = \frac{\|D_w x\|}{\|D_w^{-1} D_w x\|} \geq \frac{\|D_w x\|}{\|D_w^{-1}\| \|D_w x\|}$$

$$= \frac{1}{\|D_w^{-1}\|} ,$$

siis $\|D_w\| \geq \frac{1}{\|D_w^{-1}\|}$.

Kuitenkin esimerkiksi $w = (2, 1, 1, 1, \ldots)$

antaa $\|D_w\| = 2$, $\|D_w^{-1}\| = 1$,

joten muut väitteet eivät voi olla tosia.

4. Osoita $\|xyz\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q \|z\|_r$,

missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $1 < p, q, r < \infty$,

$x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$, $z \in \ell^r$ tai

$x \in L^p$, $y \in L^q$, $z \in L^r$.

Tod. Käytetään Hölderin epäyhtälöä.

Merkitään $s = \dfrac{1}{\frac{1}{q} + \frac{1}{r}}$,

$y^s = |y|^s$, $z^s = |z|^s$.

Tällöin

$$\|xyz\|_1 \le \|x\|_p \|yz\|_s$$

$$= \|x\|_p \left( \| y^s z^s \|_1 \right)^{1/s}$$

$$\le \|x\|_p \left( \|y^s\|_{q/s} \|z^s\|_{r/s} \right)^{1/s}$$

$$= \|x\|_p \left( \|y\|_q^s \|z\|_r^s \right)^{1/s}$$

$$= \|x\|_p \|y\|_q \|z\|_r$$

$\square$

5. Olkoon $1 < p < \infty$. Tällöin $\ell^p$ ja $L^p$ ovat aidosti konvekseja. Toisin sanoen kaikille $x, y \in \ell^p$ tai $x, y \in L^p$ pätee:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p = 1 \implies x = y .$$

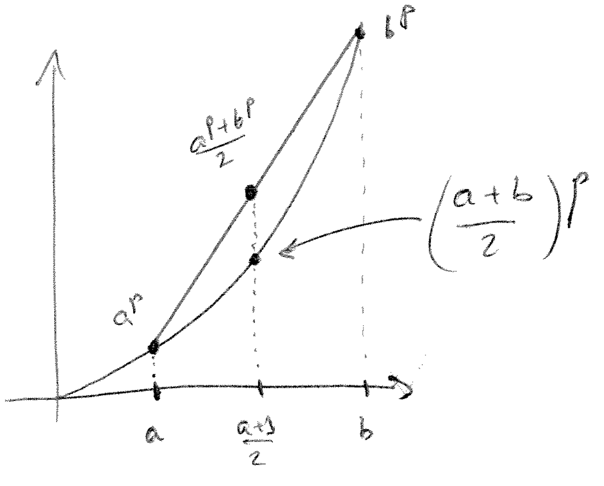
Tod. Olkoon $f(t) = t^p$. Tällöin

$$f'(t) = p t^{p-1} , \quad f''(t) = p(p-1) t^{p-2},$$

jolloin siis $f''(t) > 0$ kaikilla $t > 0$. Siis $f$ on aidosti konveksi ja

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p < \frac{a^p + b^p}{2}$$

kaikilla $0 < a, b < \infty$.



Todistetaan ensin $\ell^p$ neliöllisuudelle.

Olkoon $x, y \in \ell^p$. Oletetaan, että $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$,

$x \neq y$ ja $\|\frac{x+y}{2}\|_p = 1$.

Olkoon $k_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_{k_0} \neq 0$. Tällöin

$$1 = \|\frac{x+y}{2}\|_p^p$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left|\frac{x_k + y_k}{2}\right|^p$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{|x_k| + |y_k|}{2}\right)^p$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{k_0\}} \left(\frac{|x_k| + |y_k|}{2}\right)^p + \sum_{k \in \{k_0\}} \left(\frac{|x_k| + |y_k|}{2}\right)^p$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{k_0\}} \frac{|x_k|^p + |y_k|^p}{2} + \sum_{k \in \{k_0\}} \left(\frac{|x_k| + |y_k|}{2}\right)^p$$

$$< \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{k_0\}} \frac{|x_k|^p + |y_k|^p}{2} + \sum_{k \in \{k_0\}} \frac{|x_k|^p + |y_k|^p}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p + |y_k|^p \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \|x\|_p + \|y\|_p \right) = 1.$$

Tämä on ristiriita, ja väite on osoitettu. □

Osoitetaan sitten, että $L^p$ on aidosti konveksi. Olkoon $x, y \in L^p$, $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$,

$x \neq y$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p = 1$.

Olkoon $k_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathbb{R}^n : |x(\xi)| > \frac{1}{k_0}\}\right)$

on positiivinen. Tällöin

$$1 = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{x(\xi)+y(\xi)}{2}\right|^p d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{|x| > \frac{1}{k_0}\}} \left|\frac{x+y}{2}\right|^p + \int_{\{|x| > \frac{1}{k_0}\}} \left|\frac{x+y}{2}\right|^p$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{|x| > \frac{1}{k_0}\}} \frac{|x|^p + |y|^p}{2} + \int_{\{|x| > \frac{1}{k_0}\}} \left(\frac{|x| + |y|}{2}\right)^p$$

$$< \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{|x| > \frac{1}{k_0}\}} \frac{|x|^p + |y|^p}{2} + \int_{\{|x| > \frac{1}{k_0}\}} \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^p + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^p\right) = \frac{\|x\|_p + \|y\|_p}{2}$$

$= 1$, mikä on ristiriita. □

Lisäys tehtävään 1.

Osoitetaan suoralla todistuksella, että jos $Q_w$ on jatkuva, niin $w \in \ell^\infty$.

Tod. Oletetaan $M > 0$ s.e. $\| Q_w x \| \le M \|x\|$ kaikilla $x \in \ell^2$. Tällöin erityisesti näyttää alkioille

$$x_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

j:s alkio

$$\| Q_w x_j \| = \| (0, 0, \dots, 0, w_j, 0, \dots) \|$$

$$= |w_j| \le M \|x_j\| = M$$

Siis $|w_j| \le M$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$,

jolloin $\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j| \le M$.

Tällöin $w \in \ell^\infty$, mikä oli osoitettava. $\square$