Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet Harj. 3.

Peltonen / Aalto 5.10.2007

1) Mitkä seuraavista Banach-avaruuden ℓ^∞ vektorialiavaruuksista ovat Banach-avaruuksia?

a) $c = \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty \mid x_n \in \mathbb{K},\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n \}$

b) $c_0 = \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty \mid x_n \in \mathbb{K},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$

c) $S = \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.e. } x_n = 0 \ \forall n \geq N \}$

2) Olkoon $\mathcal{P} = \{ p: [0,1] \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n,\ x \in [0,1],\ a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \}$
Ovatko normit $\|p\|_1 = \sup \{ |p(x)| \mid x \in [0,1] \}$,
$\|p\|_2 = \int_0^1 |p(x)|\,dx$, $\|p\|_3 = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|$ ekvivalentteja?

3) Jos $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat normeja vektoriavaruudessa X, niin onko myös $\|\cdot\|$: $\|x\| = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ aina normi?

4) Osoita, että edellisen viikon harj. 6 määrittelyssä vektoriavaruudessa $L^{(p)}$ pätee Minkowskin epäyhtälö
$$\left(\int |f(x) + g(x)|^p d\lambda \right)^{1/p} \leq \left(\int |f(x)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g(x)|^p d\lambda \right)^{1/p},$$
$p \in [1, \infty)$.

5) Sanotaan: funktiot $f, g \in L^{(p)}(\Omega)$ ovat ekvivalentit jos pätee $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin merk. $f \sim g$.
Asetetaan $[f] = \{ g \in L^{(p)}(\Omega) \mid g \sim f \}$.

Osoita, että kokoelma $L^p(\Omega) := \{ [f] \mid f \in L^{(p)}(\Omega) \}$
on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_p$ sen normi:
$$\| [f] \|_p := \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\lambda \right)^{1/p}$$

H3 ①

Harjoitus 3

1. a) $c = \{ x \in \ell^\infty \mid x_n \in \mathbb{K}, \exists \lim_{n\to\infty} x_n \}$.

Osoitetaan, että $c \subset \ell^\infty$ on suljettu.

Olkoon $\{x^{(j)}\}_{j=0}^\infty \subset c$ Cauchyn jono.

Olkoon $\hat{x} \in \ell^\infty$ s.e. $x^{(j)} \longrightarrow \hat{x}$,

kun $j \to \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon

$j_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\| \hat{x} - x^{j_0} \|_{\ell^\infty} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Koska $\{x^{j_0}_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{K}$ on Cauchy,

on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e.

$$|x^{j_0}_n - x^{j_0}_m| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n,m \geq N_\varepsilon.$$

Nyt kolmioepäyhtälön ja ℓ^∞-normin määritelmän

nojalla

$$|\hat{x}_n - \hat{x}_m| \leq |\hat{x}_n - x^{j_0}_n| + |x^{j_0}_n - x^{j_0}_m| + |x^{j_0}_m - \hat{x}_m|$$

$$\leq \| \hat{x} - x^{j_0} \|_{\ell^\infty} + \frac{\varepsilon}{3} + \| x^{j_0} - \hat{x} \|_{\ell^\infty}$$

$$< \varepsilon, \quad \forall n,m \geq N_\varepsilon$$

Siis $\{\hat{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ on Cauchy. Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, $\{\hat{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ suppenee, jolloin $\hat{x} \in c$. Näin ollen c on suljettu.

b) $c_0 = \{ x \in \ell^\infty \mid x_n \in \mathbb{K},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$.

Osoitetaan, että c_0 on suljettu.

Olkoon $\{x^j\}_{j=0}^{\infty}$ Cauchyjono c_0:ssa.

Olkoon $\hat{x} \in \ell^\infty$ s.e. $x^j \longrightarrow \hat{x}$, kun $j \to \infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$.

Olkoon $j_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $\| \hat{x} - x^{j_0} \|_{\ell^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Olkoon $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $| x_k^{j_0} | < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k \geq N_\varepsilon$.

Tällöin

$$
\begin{aligned}
|\hat{x}_k| &\leq |\hat{x}_k - x_k^{j_0}| + |x_k^{j_0}| \\
&\leq \| \hat{x} - x^{j_0} \|_{\ell^\infty} + |x_k^{j_0}| \\
&< \varepsilon \quad , \text{kaikilla } k \geq N_\varepsilon .
\end{aligned}
$$

Siis $\hat{x}_k \longrightarrow 0$, kun $k \longrightarrow \infty$.

1. c) $s = \{ x \in \ell^\infty \mid \exists N \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n = 0 \ \forall n \geq N \}$.

Tämä ei ole Banachin avaruus. Olkoon

$$x^j_n = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \dots \right)$$

Jono $\{x^j\}_{j=0}^{\infty}$ on Cauchy, sillä jos on annettu $\varepsilon > 0$, niin valitsemalla $n, m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ saadaan, olettaen $n \leq m$,

$$\| x^n - x^m \|_{\ell^\infty} = \| (0, 0, \dots, 0, \tfrac{1}{n+1}, \dots, \tfrac{1}{m}, 0, 0, \dots) \|_{\ell^\infty}$$

$$< \frac{1}{n} \leq \varepsilon .$$

~~Kuitenkaan jonolla x^j ei ole raja~~

Kuitenkaan jono x^j ei suppene s:ssä, sillä $x^j \longrightarrow \hat{x}$ ℓ^∞:ssä, missä

$$\hat{x} = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots \right) \notin s .$$

2. Olkoon $P = \{ p : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \ m \in \mathbb{N}, \ a_i \in \mathbb{R} \}$.

Asetetaan kaikille $p \in P$:

$$\|p\|_1 = \sup \{ |p(x)| : x \in [0,1] \}$$

$$\|p\|_2 = \int_0^1 |p(x)| \, dx$$

$$\|p\|_3 = \sup_{1 \le k \le m} |a_k| .$$

Osoitetaan, että mitkään normit eivät ole ekvivalentteja.

$\underline{1°}$ Olkoon $p_n(x) = x^n$. Tällöin $p_n \in P$

kaikille $n \in \mathbb{N}$. Kuitenkin $\|p\|_1 = \|p\|_3 = 1$,

mutta $\|p\|_2 = \int_0^1 |x^n| \, dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Siis $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_2$ eivät ole ekvivalentteja

eivätkä $\| \cdot \|_3$ ja $\| \cdot \|_2$.

$\underline{2°}$ Olkoon $p^*(x) = 1$. Tällöin $\|p\|_1 = 1$

ja $\|p\|_3 = 0$. Siten $\| \cdot \|_1$ ja

$\| \cdot \|_3$ eivät ole ekvivalentteja. Itse

asiassa $\| \cdot \|_3$ ei ole normi.

Huom! Asettamalla

$$\|p\|_4 = \sup_{0 \le k \le n} \{ |a_k| \}$$

saadaan normi.

Tämä normi ei ole ekvivalentti minkään aiemman kanssa $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ tai $\|\cdot\|_3$.

Esimerkki $\underline{1^\circ}$ osoittaa tämän normille $\|\cdot\|_2$.

$\underline{3^\circ}$ Olkoon $p_n(x) = x^{n-1} - x^n$. Nyt

$$\|p_n\|_1 = \sup_{x \in [0,1]} |x^{n-1} - x^n|$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \le \frac{1}{n}$$

Funktion $|p_n(x)|$ maksimi:

a) $|p_n(0)| = 0$, $|p_n(1)| = 0$

b) $|p_n(x)| = p_n(x)$, $p_n'(x) = (n-1)x^{n-2} - nx^{n-1}$

$$p_n'(x) = 0 \Rightarrow (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}, \quad x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow (n-1) = nx$$

$$\Rightarrow x = \frac{n-1}{n}$$

Siis $\|p_n\|_4 = 1$ kaikilla n ja $\|p_n\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

3. Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ normeja vektoriavaruudessa $\underline{X}$. Onko $\|x\| = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ aina normi?

Ei ole. Kolmioepäyhtälö ei välttämättä toteudu.

<u>Esim.</u> Olkoon $\underline{X} = \mathbb{R}^2$. Olkoon

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$
$$\|x\|_2 = \frac{4}{3}\max\{|x_1|, |x_2|\},$$

missä $x = (x_1\ x_2)$. Olkoon $x = (\frac{3}{4}\ \frac{3}{4})$ ja $y = (0, 1)$. Tällöin

$$\|x\|_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$$
$$\|x\|_2 = \frac{4}{3}\max\{\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = 1$$

$$\|y\|_1 = 0 + 1 = 1$$
$$\|y\|_2 = \frac{4}{3}\max(0, 1) = \frac{4}{3}$$

$$\|x+y\|_1 = \|(\frac{3}{4}, \frac{7}{4})\|_1 = \frac{10}{4}$$
$$\|x+y\|_2 = \frac{4}{3}\max\{\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\} = \frac{7}{3}$$

$$\|x+y\| = \min\{\|x+y\|_1, \|x+y\|_2\} = \min\{\frac{10}{4}, \frac{7}{3}\}$$
$$= \frac{7}{3}$$

$$\|x\| + \|y\| = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\} + \min\{\|y\|_1, \|y\|_2\}$$
$$= 1 + 1$$

Siis $\|x+y\| = \frac{7}{3} > 2 = \|x\| + \|y\|$.

4. Minkowskin epäyhtälö avaruudessa $L^{(p)}(\Omega)$, mikäli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen.

Tod. Ensiksi käytetään kolmioepäyhtälön avulla

$$(1) \qquad |f(x)+g(x)|^p \le (|f(x)|+|g(x)|)^p = |f(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1} + |g(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}$$

Hölderin epäyhtälö antaa seuraavat epäyhtälöt:

$$(2) \qquad \int_\Omega |f(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}\,dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)^{(p-1)q}\right)^{1/q},$$

$$(3) \qquad \int_\Omega |g(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}\,dx \le \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Laskemalla (2) ja (3) yhteen saadaan

$$\int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)^p\,dx \le \left(\int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right)^{1/q} \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{1/p}\right].$$

Jos $\left(\int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)^p\right)^{1/q}$ on äärellinen ja positiivinen, saamme jakaa epäyhtälön sillä ja väite on todistettu.

Funktion t^p konveksisuuden nojalla saadaan

$$\left(\frac{|f(x)|+|g(x)|}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right).$$

Jos nyt $f, g \in L^{(p)}(\Omega)$ ja $f \ne 0 \ne g$, niin

$$\left(\int_\Omega \left(|f(x)|+|g(x)|\right)^p\right)^{1/q} = 2^{p/q}\left(\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|+|g(x)|}{2}\right)^p\right)^{1/q} \le 2^{p/q-1/q}\left(\|f\|^p_{L^{(p)}} + \|g\|^p_{L^{(p)}}\right)^{1/q} < \infty.$$

5. Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen:

$$[f]+[g] = [f+g],$$

$$\alpha[f] = [\alpha f].$$

Osoitetaan esimerkiksi aksiooma (1):

$$([x]+[y])+[z]$$

$$[x+y]+[z] = [(x+y)+z]$$

$$= [x+(y+z)]$$

$$= [x]+[y+z].$$

$$= [x]+([y]+[z])$$

Siis L^P on vektoriavaruus.

$\|\cdot\|_p$ on siellä normi:

$$\|[f]+[g]\|_p =$$

N1: $$\|[f+g]\|_p = \|f+g\|_{L(p)}$$

$$\leq \|f\|_{L(p)} + \|g\|_{L(p)}$$

$$= \|[f]\|_p + \|[g]\|_p,$$

missä käytettiin Minkowskin epäyhtälöä.

N2: $$\|a[f]\|_p = \|af\|_{L(p)} = a\|f\|_{L(p)} = a\|[f]\|_p.$$

N3: $$\|[f]\|_p = 0 \iff \|f\|_{L(p)} = 0, \iff f \sim 0 \iff f = 0 \in L^P.$$