11.2. <u>Määritelmä</u> Jos H_1, H_2 Hilbertin avaruuksia (11.2)
ja $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Tällöin L. 11.1. antama kuvaus
$A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ on kuvauksen A <u>adjungoitu kuvaus</u>

<u>Esim</u>. 1° Ol. $f \in C[0,1]$, $A_f \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ $(A_f g)(t) = f(t)g(t)$
Jos $f \in C[0,1]$ niin $A_f^* = A_{\bar{f}}$.

<u>Tod</u>: Ol. $g, h \in L^2(0,1)$ ja $k = (A_f)^* h$
Tällöin $(A_f g / h) = (g / k)$ ja

$$\int_0^1 f(t) g(t) \overline{h(t)}\, dt = \int_0^1 g(t) \overline{k(t)}\, dt .$$

Tämä pätee kun $f(t)\overline{h(t)} = \overline{k(t)}$ l $k(t) = \overline{f(t)} h(t)$
$\Rightarrow (A_f)^* h = k = \bar{f} h \Rightarrow (A_f)^* = A_{\bar{f}}$ □.

2° Ol. $S \in \mathcal{L}(l^2)$ s.e. $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$
V: $S^*(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$
<u>Tod</u>: Ol. $x = (x_n)_{n \in N}$, $y = (y_n)_{n \in N} \in l^2$ ja
$z = (z_n)_{n \in N} = S^*(y)$. Tällöin
$(Sx, y) = (x, S^* y) \Rightarrow$
$((0, x_1, x_2, \dots) / (y_1, y_2, \dots)) = ((x_1, x_2, \dots) / (z_1, z_2, \dots))$
$\Rightarrow$
$x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_3 + \dots = x_1 \bar{z}_1 + x_2 \bar{z}_2 + \dots$
Ok. kun $z_1 = y_2$, $z_2 = y_3, \dots$
S^* 1-käs $\Rightarrow S^*(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$

11.3. <u>Lause</u>
Ol. H_1, H_2, H_3 $\mathbb{C}$-kertoimisia Hilbert-avaruuksia
$A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $A_3 \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
Tällöin pätee
(a) $(\mu A_1 + \lambda A_2)^* = \bar{\mu} A_1^* + \bar{\lambda} A_2^*$
(b) $(A_3 A_1)^* = A_1^* A_3^*$

Tod: HT

11.4. Lause Ol. H_1, H_2 Hilbert-avaruuksia ja $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ (11.3.)
Tällöin pätee:
(i) $(A^*)^* = A$
(ii) $\|A^*\| = \|A\|$
(iii) $f: \mathcal{L}(H_1,H_2) \to \mathcal{L}(H_2,H_1)$ $f(A) = A^*$ on jatkuva
(iv) $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

Tod: (i): $x \in H_1, y \in H_2$: $(y \mid (A^*)^* x) = (A^*y \mid x) = \overline{(x \mid A^*y)}$
$= \overline{(Ax \mid y)} = (y \mid Ax) \Rightarrow (A^*)^*x = Ax \quad \forall x \in H_1$
$\Rightarrow (A^*)^* = A$.

(ii) L. 11.1 tod $\Rightarrow \|A^*\| \le \|A\|$.
Sov. (i) $\Rightarrow \|A\| = \|(A^*)^*\| \le \|A^*\|$.

(iii) huom: f ei lin. Ol. $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2) \Rightarrow$
$\|f(A) - f(B)\| = \|A^* - B^*\| = \|(A-B)^*\| = \|A - B\| \Rightarrow$ väit.
(iv) $\|A\| = \|A^*\| \Rightarrow$
$\|A^*A\| \le \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$
Toisaalta: $\|Ax\|^2 = (Ax \mid Ax) = (A^*Ax, x)$
$\le \|A^*Ax\|\|x\| \le \|A^*A\|\|x\|\|x\| \Rightarrow \|A\|^2 \le \|A^*A\|$

11.5. Lause Ol. H_1, H_2 Hilbert-avaruuksia ja $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$
Tällöin pätee:
(i) $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$
(ii) $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$
(iii) $\ker A^* = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Im} A$ on tiheä H_2:issa
Tod:
(i): Os. $\ker A \subset (\operatorname{Im} A^*)^\perp$: olk. $x \in \ker A$
ja $z \in \operatorname{Im} A^*$ l. $z = A^*y$ jollakin $y \in H_1 \Rightarrow$
$(x \mid z) = (x \mid A^*y) = (\underset{=0}{Ax} \mid y) = 0$.
"$\supset$" olk $x \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$
$A^*Ax \in \operatorname{Im} A^* \Rightarrow$
$(Ax, Ax) = (x \mid A^*Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0$
$\Rightarrow x \in \ker A$
(ii): (i) $\Rightarrow \ker A^* = (\operatorname{Im}(A^*)^*)^\perp = (\operatorname{Im} A)^\perp$
(iii): "$\Rightarrow$" $\overline{\operatorname{Im} A} \overset{5.14b}{=} ((\operatorname{Im} A)^\perp)^\perp = (\ker A^*)^\perp = \{\bar{0}_{H_2}\}^\perp = H_2$
"$\Leftarrow$" Jos $\overline{\operatorname{Im} A} = H_2$, niin 5.14b) $\Rightarrow$
$(\operatorname{Im} A)^{\perp\perp} = H_2$

$\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp \subset ((\operatorname{Im} A)^\perp)^{\perp\perp} = H_2^\perp = \{0\}$. □

11.6. Seuraus Ol. H Hilbertin avaruus ja $A \in \mathcal{L}(H)$. Tällöin
A on kääntyvä $\Leftrightarrow$ $\ker A^* = \{0\}$ ja $\exists\, \alpha > 0$ s.e.
$\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$.

Esim $S \in \mathcal{L}(l^2)$ $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$
S ei kääntyvä.
Tod: Edellä $S^*(y_1, y_2, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots)$.
Nyt $(1, 0, \ldots) \in \ker S^*$ $\overset{11.6}{\Rightarrow}$ S ei kääntyvä

11.7. Lause Jos H Hilbertin avaruus niin
$A \in \mathcal{L}(H)$ on kääntyvä $\Leftrightarrow$ A^* on kääntyvä ja
$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Tod: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ $\Rightarrow$
$(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^*$ $\Rightarrow$
$(A^{-1})^* A^* = A^*(A^{-1})^* = I$. $\square$.

1.7. Määritelmä
Ol. H Hilbertin avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$. A on normaali
jos pätee $AA^* = A^*A$.

Esim 1° Ol. $k \in C[0,1]$, $A_k \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ $(A_k g)(t) = k(t)g(t)$.
A_k on normaali: Aik. $A_f^* = A_{\bar{f}}$,
$\forall\, g \in L^2(0,1)$:
$(A_f(A_f)^*)(g) = A_f(A_{\bar{f}}(g)) = A_f(\bar{f}g) = f\bar{f}g$
ja $(A_f^* A_f)(g) = A_f^*(fg) = A_{\bar{f}}(fg) = \bar{f}fg$ ".

2° $S \in \mathcal{L}(l^2)$ $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$
ei ole normaali.
Aik.: $\forall\, (y_n) \in l^2$ $S^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots)$
$\forall\, (x_n) \in l^2$
$S^*S(x_1, x_2, \ldots) = S^*(0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$
$SS^*(x_1, x_2, \ldots) = S(x_2, x_3, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots)$ $\neq$
kun $x_1 \neq 0$

3° Ol. $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $I: H \to H$ id-kuvaus
tällöin $A \in \mathcal{L}(H)$ normaali $\Leftrightarrow$ $A - \lambda I$ normaali
Tod "$\Rightarrow$" $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$
$(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = (A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I) = AA^* - \bar{\lambda} A - \lambda A^* + |\lambda|^2$
$\overset{\text{ol}}{=} A^*A - \bar{\lambda} A - \lambda A^* + |\lambda|^2 = (A^* - \bar{\lambda} I)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)$
"$\Leftarrow$" saadaan myös.

11.8. Lause Ol. H Hilbert-avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$ normaali ja $\alpha > 0$. Tällöin pätee (11.5.)

(i) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ $\forall\, x \in H$

(ii) Jos $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ $\forall\, x \in H$, niin $\ker A^* = \{0\}$

Tod: (i) Ol. $x \in H$ $A^*A = AA^* \Rightarrow$

$\|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 = (Ax|Ax) - (A^*x|A^*x)$

$= (x|A^*Ax) - (x|\underbrace{(A^*)^*}_{=A}A^*x) = (x|A^*Ax - AA^*x) = 0$

(ii) Ol. $y \in \ker A^*$

$\Rightarrow A^*y = 0 \overset{(i)}{\Rightarrow} 0 = \|A^*y\| = \|Ay\| \geq \alpha \|y\|$

$\Rightarrow \|y\| = 0 \Rightarrow y = 0$. □.

11.9. Seuraus Ol. H Hilbert-avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$ normaali. A on kääntyvä $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha > 0$ s.e. $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ $\forall\, x \in H$.

11.10. Määritelmä Ol. H Hilbert-avaruus. $A \in \mathcal{L}(H)$ on itseadjungoitu jos $A = A^*$.

11.11. Lause Ol. H Hilbert-avaruus, $S = \{A \in \mathcal{L}(H) / A$ itseadjungoitu$\}$. Tällöin pätee: (i) $A_1, A_2 \in S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A_1 + \beta A_2 \in S$

(ii) $S \subset \mathcal{L}(H)$ on suljettu.

Tod: (i) $(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = (\bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*) \underset{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}{=} \alpha A_1^* + \beta A_2^* \overset{A_i^* = A_i}{=} \alpha A_1 + \beta A_2$

(ii) Ol. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ s.e. $A_n \to A$ kun $n \to \infty$

$\forall n$: $A_n = A_n^* \to A^*$ ($A \mapsto A^*$ jatkuva!) $\Rightarrow A = A^*$. □.

11.12. Lause Ol. H Hilbert-avaruus $A \in \mathcal{L}(H)$. Tällöin pätee

(i) A^*A ja AA^* ovat itseadjungoituja

(ii) $A = B + iC$, missä B, C itseadjungoituja.

Tod: (i) $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$

$(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$.

(ii) Ol. $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ja $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$

Tällöin $A = B + iC$ ja

$B^* = \frac{1}{2}(A^* + (A^*)^*) = \frac{1}{2}(A^* + A) = B$

$C^* = \frac{-1}{2i}(A^* - (A^*)^*) = \frac{1}{2i}(A - A^*) = C$ □.

Saatiin: $\{A \in \mathcal{L}(H) /$ A itseadjungoitu$\}$ on reaalilukukertoiminen Banach-avaruus.

Analogia kompleksilukuihin ⇒ sanotaan B, C operaattorin A reaali- ja imaginaariosat

11.13 <u>Määritelmä</u> Ol. H Hilbert-avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$. A on <u>unitaarinen</u> jos pätee $AA^* = A^*A = I$

<u>Esim</u> Ol. $k \in C[0,1]$ ja $A_k \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ $A_k(g)(t) = k(t)g(t)$.
Jos $f \in C[0,1]$ s.e. $|f(t)| = 1$ $\forall t \in [0,1]$ niin A_f on unitaarinen.
<u>Tod</u>: Kts $(A_f)^* = A_{\bar{f}}$

$$(A_f)^*(A_f)g(t) = \bar{f}(t)f(t)g(t) = |f(t)|^2 g(t) = g(t)$$

$\Rightarrow (A_f)^*(A_f) = I$, samoin $A_f(A_f)^* = I$.

11.14 <u>Lause</u> Ol. X sisätuloavaruus, $A, B \in \mathcal{L}(X)$ s.e. $(Ax|x) = (Bx|x)$ $\forall x \in X$. Tällöin $A = B$.
<u>Tod</u>: HT

11.15 <u>Lause</u> Ol. H Hilbert-avaruus, $A, B \in \mathcal{L}(H)$
Tällöin (i) $A^*A = I \iff A$ on isometria
(ii) A on unitaarinen $\iff A : H \to A(H) = H$ on isometria
<u>Tod</u>: (i) "⇒":

$$\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (x|A^*Ax) = (x|x) = \|x\|^2$$

"⇐" $(x|A^*Ax) = (Ax|Ax) = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = (x|I(x))$.

(ii): "⇒" (i) ent. $y = A(A^*y) \in A(H)$ $\forall y \in H$
"⇐" Ol $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ $A^*A = I$, Jos $y \in H - A(H)$ $\exists x \in H$ s.e. $y = A(x)$ ⇒

$$AA^*y = A\underbrace{A^*(Ax)} = Ax = y \Rightarrow AA^* = I$$

11.16 <u>Lause</u> Ol. H Hilbertin avaruus, $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{L}(H) \mid A$ unitaarinen$\}$
Tällöin pätee:
(i) Jos $A \in \mathcal{U}$ niin $A^* \in \mathcal{U}$ ja $\|A\| = \|A^*\| = 1$
(ii) Jos $A_1 A_2 \in \mathcal{U}$ niin $A_1 A_2 \in \mathcal{U}$ ja $A_1^{-1} \in \mathcal{U}$
(iii) $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}(H)$ on suljettu.

<u>Tod</u>: HT

Ol. $A \in M_n(\mathbb{C}) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{C} \quad 1 \le i,j \le n\}$
Tällöin A:n ominaisarvot $= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I$ ei kääntyvä$\}$
Yleistetään idea Hilbertin avaruuteen H:

11.17. Määritelmä Ol. H Hilbertin avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$
Operaattorin A spektri on joukko
$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ ei kääntyvä}\}$$

Esim $\sigma(I) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (1-\lambda)I$ ei kääntyvä$\} = \{1\}$
vast. $\sigma(\mu I) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mu - \lambda) I$ " $\} = \{\mu\}$.

Selvästi: Jos λ operaattorin $A \in \mathcal{L}(H)$ ominaisarvo, niin $\lambda \in \sigma(A)$

Esim. Operaattorilla $S \in \mathcal{L}(l^2)$, $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$
ei ole ominaisarvoa: Ol. $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ ja $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$.
s.e. $Sx = \lambda x \Rightarrow$
$(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$
Jos $\lambda = 0 \Rightarrow x_k = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ ↯
Jos $\lambda \ne 0 \Rightarrow (\lambda x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0) \Rightarrow (\lambda x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0) \Rightarrow \dots$

11.18. Lause Ol. H Hilbertin avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$
(i) Jos $|\lambda| > \|A\|$ niin $\lambda \notin \sigma(A)$
(ii) $\sigma(A)$ on suljettu joukko.

Tod: (i): Ol $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \|\lambda^{-1} A\| < 1$
$\overset{(4.12)}{\Rightarrow} I - \lambda^{-1}A$ on kääntyvä $\Rightarrow \lambda \notin \sigma(A)$
(ii) Ol.k. $F : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(H)$ s.e. $F(\lambda) = \lambda I - A$
tällöin F jatkuva:
$$\|F(\mu) - F(\lambda)\| = \|\mu I - A - (\lambda I - A)\| = |\mu - \lambda|$$
$$\sigma(A) = F^{-1} \underbrace{\{B \in \mathcal{L}(H) \mid B \text{ ei kääntyvä}\}}_{\subset \mathcal{L}(H) \text{ suljettu } (4.13(ii))} \subset \mathbb{C}$$
suljettu joukko (suljetun joukon alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa). □.

$\therefore$ $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ suljettu ja rajoitettu $\Rightarrow \sigma(A)$ kompakti

Huom Päte $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$
$(A^* - \bar{\lambda} I = (A - \lambda I)^*$ kääntyvä $\underset{L.11.7.}{\Leftrightarrow} A - \lambda I$ kääntyvä$)$

Esim Ol. $S: \ell^2 \to \ell^2$ $\quad S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$

Tällöin (i) Jos $\lambda \in \mathbb{C}$ s.e. $|\lambda| < 1$ niin λ on S^*:in ominaisarvo

(ii) $\sigma(S) = \{\lambda \in S \mid |\lambda| \leq 1\}$.

Tod! Ol. $\lambda \in \mathbb{C}$ s.e. $|\lambda| < 1$. Riittää löytää $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ s.e. $S^*((x_n)) = \lambda (x_n)$

Aik. $S^*(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots) \Rightarrow$

$(x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$ eli $x_{k+1} = \lambda x_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Eräs ratk $(x_k)_k = (\lambda^{k-1})_k \neq 0$

Jos $|\lambda| < 1$ niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} < \infty$$

$\Rightarrow \lambda$ on S^*:in ominaisarvo ja $(\lambda^{k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ ominaisvektori.

(ii) (i) $\Rightarrow \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \subset \sigma(S^*)$

$\Rightarrow \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \subset \sigma(S)$

$= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$

$\sigma(S)$ suljettu (11.18. ii) $\Rightarrow \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(S)$

$\|S\| = 1 \Rightarrow$ Jos $|\lambda| > 1$ niin $\lambda \notin \sigma(S)$ $\Rightarrow$ väite. $\square$.

11.19. Lause Ol. H Hilbertin avaruus ja $A \in \mathcal{L}(H)$.

(i) Jos p on polynomi niin $\sigma(p(A)) = \{p(\mu) \mid \mu \in \sigma(A)\}$

(ii) Jos A kääntyvä, niin $\sigma(A^{-1}) = \{\mu^{-1} \mid \mu \in \sigma(A)\}$.

Tod! (i) Ol. $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $q(z) = \lambda - p(z)$ polynomi

ja $q(z) = c(z-\mu_1)(z-\mu_2)\cdots(z-\mu_n)$, $0 \neq c$, $\mu_i \in \mathbb{C}$

$\lambda \notin \sigma(p(A)) \Leftrightarrow \lambda I - p(A)$ kääntyvä

$\Leftrightarrow q(A)$ on kääntyvä

$\Leftrightarrow c(A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_n I)$ on kääntyvä

$\Leftrightarrow (A - \mu_i I)$ on kääntyvä $\forall i = 1, \ldots, n$

$\Leftrightarrow q(\mu) \neq 0 \quad \forall \mu \in \sigma(A)$

$\Leftrightarrow \lambda \neq p(\mu) \quad \forall \mu \in \sigma(A)$

(ii) A kääntyvä $\Rightarrow 0 \notin \sigma(A) \Rightarrow \forall \lambda \in \sigma(A)$ $\lambda = \frac{1}{\mu}$ jollakin $\mu \in \mathbb{C}$

Pätee:

$\mu^{-1} I - A^{-1} = -A^{-1}\mu^{-1}(\mu I - A)$, $\quad A^{-1}\mu^{-1}$ kääntyvä

$\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu^{-1} I - A^{-1}$ ei kääntyvä

$\Leftrightarrow -A^{-1}\mu^{-1}(\mu I - A)$ ei kääntyvä $\Leftrightarrow \mu I - A$ ei kääntyvä

$\Leftrightarrow \mu \in \sigma(A)$. $\square$.

Merk. $p(\sigma(A)) = \{p(\mu) \mid \mu \in \sigma(A)\}$ (11.9.)

11.20. <u>Lause</u> Jos H Hilbert-avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$ unitaarinen niin $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

<u>Tod</u>:

A unitaarinen $\Rightarrow \|A\| = 1 \overset{L.11.18.}{\Rightarrow} \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le 1\}$

Samoin $\sigma(A^*) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le 1\}$ (A^* unitaarinen)

$A^* = A^{-1} \overset{11.19.}{\Rightarrow}$

$\sigma(A) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(A^*)\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \ge 1\}$. $\square$.

11.21. <u>Määritelmä</u> Ol. H Hilbert-avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$

Operaattorin A <u>spektraalisäde</u> on

$$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\} \in [0, \infty]$$

Operaattorin A <u>numeerinen arvoalue</u> on

$$V(A) = \{(Ax \mid x) \mid \|x\| = 1\}.$$

11.22. <u>Lause</u> Jos $A \in \mathcal{L}(H)$ on normaali, niin $\sigma(A) \subset \overline{V(A)}$

<u>Tod</u>:

Ol. $\lambda \in \sigma(A)$ tällöin $A - \lambda I$ on normaali

L.11.9 $\Rightarrow \exists$ jono $(x_n)_n \subset H$ s.e. $\|x_n\| = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda I)x_n\| = 0$

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow ((A - \lambda I)x_n \mid x_n) \to 0$ kun $n \to \infty$

$$= (Ax_n \mid x_n) - \underbrace{(\lambda x_n \mid x_n)}_{= \lambda \|x_n\|^2 = \lambda}$$

$\Rightarrow$

$(Ax_n \mid x_n) \to \lambda$ kun $n \to \infty$

$\Rightarrow \lambda \in \overline{V(A)}$ $\square$.

11.23. <u>Lause</u> Ol. H Hilbert-avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu

(i) $V(A) \subset \mathbb{R}$

(ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

(iii) joko $\|A\|$ tai $-\|A\| \in \sigma(A)$

(iv) $r_\sigma(A) = \sup\{|\tau| \mid \tau \in V(A)\} = \|A\|$

(v) $\inf\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\} \le \mu \le \sup\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ $\forall \mu \in V(A)$.

Tod: (i): A itseadjungoitu $\Rightarrow$ (11.10.)

$(Ax|x) = (x|Ax) = \overline{(Ax,x)}$ $\forall x \in H$

$\Rightarrow (Ax|x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in H \Rightarrow V(A) \subset \mathbb{R}$.

(ii): $11.22 \Rightarrow \sigma(A) \subset \overline{V(A)} \overset{(i)}{\Rightarrow} \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

(iii): Jos $A=0$ niin väite selvä $\Rightarrow$ voi ol. $\|A\|=1$

(muuten tarkastellaan operaattoria $\frac{A}{\|A\|}$)

$\Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ s.e. $\|x_n\|=1$ ja $\|Ax_n\| \to 1$

$\Rightarrow$

$\|(I-A^2)x_n\|^2 = ((I-A^2)x_n | (I-A^2)x_n)$

$= \|x_n\|^2 + \|A^2x_n\| - 2(A^2x_n|x_n) \overset{A=A^*}{\leq} 2 - 2(Ax_n|Ax_n)$

$= 2 - 2\|Ax_n\|^2$

$\Rightarrow \|(I-A^2)x_n\|^2 \to 0$ kun $n \to \infty$ joten $1 \in \sigma(A^2) \overset{11.19.}{=} \sigma(A)^2$

$\Rightarrow 1$ tai $-1 \in \sigma(A)$.

(iv): $\|A\| \overset{(iii)}{\leq} r_\sigma(A) \overset{L.11.22}{\leq} \sup\{|z| \mid z \in V(A)\} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|A\|$

$\Rightarrow$ täytyy päteä "=".

(v): Olk. $\alpha = \inf\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ ja $\beta = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

Jos $\lambda \in V(A)$ $\exists y \in H$ s.e. $\|y\|=1$ ja $\lambda = (Ay,y)$

Jos $\boxed{\lambda < \alpha}$ niin $\sigma(\beta I - A) = \beta - \sigma(A)$ (11.19.)

$\Rightarrow \sigma(\beta I - A) \in [0, \beta-\alpha]$

$\Rightarrow r_\sigma(\beta I - A) \leq \beta - \alpha$.

kuitenkin:

$((\beta I - A)y|y) = (\beta y|y) - (Ay|y) = \beta - \lambda > \beta - \alpha$ ↯

kohdan (iv) kanssa: $\beta I - A$ itseadjungoitu

Jos $\lambda > \beta$ niin $\sigma(A-\alpha I) = \sigma(A) - \alpha$ (11.19)

$\Rightarrow \sigma(A-\alpha I) \in [0, \beta-\alpha] \Rightarrow r_\sigma(A-\alpha I) \leq \beta - \alpha$

kuitenkin:

$((A-\alpha I)y|y) = (Ay,y) - \alpha\|y\|^2 = \lambda - \alpha > \beta - \alpha$ ↯.

kohdan (iv) kanssa: $A - \alpha I$ itseadjungoitu

$\therefore$ $\lambda \in [\alpha, \beta]$

11.24. Seuraus (i) Jos $A \in M_n(\mathbb{C})$ itseadjungoitu ja $\lambda_1, \dots \lambda_n$ A:n ominaisarvot, niin $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$

(ii) Jos $B \in M_n(\mathbb{C})$ niin B^*B on itseadjungoitu ja $\|B\|^2 = \|B^*B\|$

Edellä saatiin: Jos $A \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu niin
$$\sigma(A) \in [0,\infty) \iff (Ax|x) \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

11.25. Määritelmä. Ol. H Hilbert-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(H)$. A on positiivinen jos se on itseadjungoitu ja
$$(Ax|x) \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

Saatiin: A positiivinen $\iff \sigma(A) \subset [0,\infty)$

Esim. Ol. H Hilbert-avaruus, $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(H)$ positiivisia ja $A \in \mathcal{L}(H)$, $\alpha > 0$. Tällöin
(i) $0, I$ ovat positiivisia
(ii) A^*A on positiivinen
(iii) $S_1 + S_2$, αS_i ovat positiivisia

Merk. $A \geq 0$ jos $A \in \mathcal{L}(H)$ positiivinen
$A \geq B$ jos $A - B$ positiivinen, $A, B \in \mathcal{L}(H)$

11.26. Lause. Jos H on Hilbert-avaruus ja $P \in \mathcal{L}(H)$ s.e. $P = P^* = P^2$ niin P on avaruuden H ortoprojektio aliavaruudelle $M = \operatorname{Im} P$ ja $\|P\| \leq 1$.
Tod: $H = \operatorname{Im} P \oplus \ker P$.
OS. $M = \operatorname{Im} P$ on suljettu: Jos $(y_n) \subset M$ s.e. $y_n \to y$, niin $\forall n: \exists x_n$ s.e. $Px_n = y_n \Rightarrow$
$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim Px_n \overset{\text{ol.}}{=} \lim P^2 x_n \overset{P \text{ jva}}{=} P(\lim Px_n) = Py$$
$\therefore y \in \operatorname{Im} P$.
L.6.12 $\Rightarrow$ P on ortoprojektio jos $\forall x \in H$ $x - Px \perp \operatorname{Im} P$:
Olk. $y \in \operatorname{Im} P$. Tällöin $y = Pz$ jollakin $z \in H$ ja
$$\langle x - Px, y\rangle = \langle x - Px, Pz\rangle = \langle x, Pz\rangle - \langle Px, Pz\rangle \overset{P=P^*}{=} \langle x, Pz\rangle - \langle x, P^2 z\rangle \overset{P^2=P}{=} 0.$$
L.6.14. $\Rightarrow$ $H = M \oplus M^\perp$ ja $\|Px\| \leq \|x\|$ $\forall x \in H$
eli $\|P\| \leq 1$. □.

11.27. Lause. Ol. H Hilbert-avaruus, M suljettu H:n v.a.a. ja P H:n ortoprojektio M:lle. Tällöin $I - P$ on H:n ortoprojektio avaruudelle $M^\perp$.
Tod: $I - P$ itseadjungoitu ja
$(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P \Rightarrow I - P$ ortoprojektio
Olk. $x = y + z$; $y \in M$, $z \in M^\perp \Rightarrow (I-P)x = x - Px = x - y = z \in M^\perp$. □.

11.28 Määritelmä Ol. H Hilbert-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(H)$. Operaattorin A neliöjuuri on operaattori $B \in \mathcal{L}(H)$ s.e. $B^2 = A$.

11.29. Lause Ol. H Hilbert-avaruus, $\overline{X} = \{A \in \mathcal{L}(H) \mid A$ itseadjungoi
Jos $s \in \overline{X}$ $\exists$ $\overline{\Phi} \in \mathcal{L}(C(\sigma(s), \mathbb{R}), \overline{X})$ s.e.
(a) $\overline{\Phi}(p) = p(s)$ $\forall$ polynomeilla $g \in C(\sigma(s), \mathbb{R})$
(b) $\overline{\Phi}(fg) = \overline{\Phi}(f)\overline{\Phi}(g)$ $\forall f, g \in C(\sigma(s), \mathbb{R})$.

Tod: muistutus L.11.11. $\Rightarrow$ $\overline{X}$ $\mathbb{R}$-kertoiminen Banach-avaruus
Ol. $\mathcal{P} \subset C(\sigma(s), \mathbb{R})$ polynomien v.a.a.
Aset. $\phi : \mathcal{P} \to \overline{X}$ $\phi(p) = p(s)$
ϕ lin. ja $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$ (*)
Pätee:
$p(s)$ itseadjungoitu
$\|\phi(p)\| = \|p(s)\| = r_\sigma(p(s)) = \sup\{|\mu| \mid \mu \in \sigma(p(s))\}$
L.11.19 $= \sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(s)\} = \|p\|$
$\therefore$ ϕ isometria
$\overline{X}$ $\mathbb{R}$-kertoiminen Banach-avaruus
$\overline{\mathcal{P}} = C(\sigma(s), \mathbb{R})$ (Stone-Weierstraß) $\overset{L.4.5}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\overline{\Phi} \in \mathcal{L}(C(\sigma(s), \mathbb{R}), \overline{X})$
s.e. $\overline{\Phi}(p) = \phi(p)$ $\forall p \in \mathcal{P}$
$\overline{\Phi}$ jatkuva $\Rightarrow$ $\overline{\Phi}(fg) = \overline{\Phi}(f)\overline{\Phi}(g)$ soveltamalla ehtoa (*) polynomeihin $p_k \to f$ ja $g_k \to g$. $\square$

Jos H, $\overline{X}$, s ja $\overline{\Phi}$ kuten edellä merk. $f(s) = \overline{\Phi}(f)$ kun $f \in C(\sigma(s), \mathbb{R})$

Aik. $p(s)$ nyt $f(s)$ kun $f \in C(\sigma(s), \mathbb{R})$
Ol. $\sigma(s) \subset [0, \infty)$ ja $g : \sigma(s) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{x}$
tällöin $g \in C(\sigma(s), \mathbb{R})$ ja $g(s)$ mielekäs

11.30. Lause Ol. H Hilbert-avaruus ja $\overline{X} = \{A \in \mathcal{L}(H) \mid A$ itseadj.$\}$ ja $s \in \overline{X}$ positiivinen. Tällöin $\exists_1$ R s.e. $R^2 = s$ ja R saadaan s:n polynomien rajana.

Tod: Konstruoidaan R:
s positiivinen $\Rightarrow$ $\sigma(s) \subset [0, \infty)$. Määrit $f, g, j : \sigma(s) \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(x) = x^{1/4}$, $g(x) = x^{1/2}$, $j(x) = x$
$f, g, j \in C(\sigma(s), \mathbb{R})$. Aset. $R = g(s)$ ja $T = f(s)$
$R, S \in \overline{X}$
$\overline{\mathcal{P}} = C(\sigma(s), \mathbb{R}) \Rightarrow g = \lim p_k$, $p_k \in \mathcal{P}$
$\Rightarrow R = \lim p_k(s)$

L.11.29 $\Rightarrow$ $R^2 = g(s)^2 = g^2(s) = j(s) = S$

ja $T^2 = (f(S))^2 = f^2(S) = g(S) = R$ eli R positiivinen

1-käs: Ol. $Q^2 = S$, Q positiivinen

Pätee $QS = QQ^2 = Q^2Q = SQ$

Jos p polynomi, niin $Q\,p(S) = p(S)\,Q$

$R = \lim p_k(S)$ $\Rightarrow$ $QR = RQ$

Q positiivinen $\Rightarrow$ ed. konstruktio $\Rightarrow$ $\exists$ posit. P: $P^2 = Q$

Olk. $x \in H$ ja $y = (R-Q)x$. $R^2 = Q^2 = S \Rightarrow$

$\|Ty\|^2 + \|Py\|^2 = (T^2y|y) + (P^2y|y)$

$= ((R+Q)y|y) = ((R+Q)(R-Q)x|y)$

$= ((R^2-Q^2)x|y) = 0$

$\Rightarrow Ty = Py = 0 \Rightarrow T^2y = P^2y = 0 \Rightarrow Ry = Qy = 0$

$\Rightarrow \|(R-Q)x\|^2 = ((R-Q)^2x|x) = ((R-Q)y|x) = 0$.

$\therefore R = Q$ $\square$.

Merk. L.11.30 antamaa 1-käs neliöjuurta $S^{1/2}$ kun $S \in \overline{X}$.

11.31. <u>Lause</u> Ol. H Hilbert-avaruus, $T \in \mathcal{L}(H)$ kääntyvä. Tällöin pätee $T = UR$, missä U unitaarinen ja R positiivinen.

<u>Tod</u>: T kääntyvä $\Rightarrow$ T^* kääntyvä $\Rightarrow$ TT^* kääntyvä

T^*T positiivinen $\Rightarrow$ $\exists$ posit $R = (T^*T)^{1/2}$

$\Rightarrow$ R kääntyvä. Aset. $U = TR^{-1}$ kääntyvä

$\Rightarrow$ $U^*U = (R^{-1})^*T^*TR^{-1} \underset{R^* = R}{=} R^{-1}R^2R^{-1} = I$

L.11.15 $\Rightarrow$ U unitaarinen. $\square$.

$T = UR$ on T:n <u>polaarihajotelma</u>.

12. Kompaktit operaattorit

12.1 Määritelmä Ol. $\underline{X}, \underline{Y}$ normiavaruuksia. $A \in L(\underline{X}, \underline{Y})$ on kompakti jos $\forall$ rajoitetuilla jonoilla $(x_n) \subset \underline{X}$ jonolla $(Ax_n) \subset \underline{Y}$ on suppeneva osajono.

Merk. $K(\underline{X}, \underline{Y}) = \{A \in L(\underline{X}, \underline{Y}) \mid A \text{ kompakti}\}$

12.2. Lause Ol. $\underline{X}, \underline{Y}$ normiavaruuksia ja $A \in K(\underline{X}, \underline{Y})$. Tällöin A on rajoitettu l. $K(\underline{X}, \underline{Y}) \subset \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{Y})$

Tod: Ol. A ei rajoitettu $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in \underline{X}$ $\|x_n\| = 1$ s.e. $\|Ax_n\| \geq n$. A kompakti $\Rightarrow \exists$ suppeneva osajono (Ax_{n_k}). $\|Ax_{n_k}\| \geq n_k \geq k \to \infty$ kun $k \to \infty$ $\lightning$

12.3. Lause Ol. $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ normiavaruuksia. Tällöin pätee:

(i) Jos $A, B \in K(\underline{X}, \underline{Y})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ niin $\alpha A + \beta B \in K(\underline{X}, \underline{Y})$ eli $K(\underline{X}, \underline{Y})$ on $\mathcal{L}(\underline{X}, \underline{Y})$:n v.a.a.

(ii) Jos $A \in \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\underline{Y}, \underline{Z})$ ja ainakin toinen operaattoreista A, B on kompakti niin $BA \in K(\underline{X}, \underline{Z})$

Tod: (a) Ol. $(x_n) \subset \underline{X}$ rajoitettu. Ol. $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_k$ s.e. $(Ax_{n_k})_k$ suppenee. $(x_{n_k})_k$ rajoitettu, B kompakti $\Rightarrow \exists (x_{n_{k_j}})_j$ s.e. $(Bx_{n_{k_j}})$ suppenee

$\Rightarrow (\alpha A x_{n_{k_j}} + \beta B x_{n_{k_j}})_j$ suppenee.

(b) Ol $(x_n) \subset \underline{X}$ rajoitettu. Jos A kompakti $\exists (x_{n_k})$ s.e. $(Ax_{n_k})_k$ supp.
B jatkuva $\Rightarrow (BAx_{n_k})_k$ supp. $\Rightarrow BA \in K(\underline{X}, \underline{Z})$

Jos $A \in \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{Y})$ ei kompakti, niin aina $(Ax_n)_n$ rajoitettu ja B kompakti $\Rightarrow \exists (Ax_{n_k})_k$ s.e. $(BAx_{n_k})_k$ supp $\Rightarrow BA \in K(\underline{X}, \underline{Z})$. $\square$.

12.4. Lause Ol. $\underline{X}, \underline{Y}$ normiavaruuksia, $A \in \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{Y})$.
Pätee: (i) Jos $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$, niin A kompakti.
(ii) Jos $\dim \underline{X}$ tai $\dim \underline{Y} < \infty$ niin A kompakti.

Tod: (i) Ol. $(x_n) \subset \mathbb{X}$ rajoitettu $\Rightarrow (Ax_n)_n$ rajoitettu jono äärell. ul. v.a.a:ssa $\mathrm{Im} A$
$\Rightarrow (Ax_n)$:llä suppeneva osajono.
(ii) Ol. $\dim \mathbb{X} < \infty \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} A) < \infty \overset{(i)}{\Rightarrow}$ väite.
$\dim \mathbb{Y} < \infty \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} A) \leq \dim \mathbb{Y} < \infty$
$(i) \Rightarrow$ väite. □

Esim Ol. $\mathbb{X}$ ääretönulotteinen normiavaruus. Tällöin
1° $I_{\mathbb{X}}$ ei kompakti: L.3.22 $\Rightarrow \exists$ jono $(x_n)_n$ $\|x_n\| = 1$ jolla ei supp. osajonoa.
2° Jos $A \in K(\mathbb{X})$ niin A ei kääntyvä.
Jos A kääntyvä $\Rightarrow I = AA^{-1} \in K(\mathbb{X})$ (12.3.(ii)) ↯.

12.5. Lause Ol. $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ normiavaruuksia $A \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$
(a) A on kompakti $\Leftrightarrow$ $\forall$ rajoitetulla joukolla $M \subset \mathbb{X}$ $A(M)$ on relatiivisesti kompakti
(b) Jos A on kompakti niin $\mathrm{Im}(A)$ ja $\overline{\mathrm{Im}(A)}$ ovat separoituvia.

Tod: (a) "$\Rightarrow$" Ol. $M \subset \mathbb{X}$ raj. ja $(y_n) \subset \overline{A(M)}$.
Pitää os. (y_n):llä on suppeneva osajono $y_{n_k} \to y \in \overline{A(M)}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n \in M$ s.e. $\|y_n - A(x_n)\| < \frac{1}{n}$.
M raj. $\Rightarrow (x_n) \subset M$ raj.
A kompakti $\Rightarrow \exists$ osajono (Ax_{n_k}) ja $y \in \overline{A(M)}$
s.e. $\|Ax_{n_k} - y\| \to 0 \Rightarrow \|y_{n_k} - y\| \leq \|y_{n_k} - Ax_{n_k}\| + \|Ax_{n_k} - y\| \to 0$
kun $k \to \infty$. $\therefore (y_{n_k}) \to y \in \overline{A(M)}$
"$\Leftarrow$" Ol. $(x_n) \subset \mathbb{X}$ rajoitettu jono $\overset{\text{ol.}}{\Rightarrow}$ $\overline{\{Ax_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ kompakti
$\Rightarrow \exists$ suppeneva osajono (Ax_{n_k}).

(b): (a) $\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}$ $\overline{A(B(0,r))} \subset \mathbb{Y}$ kompakti $\Rightarrow$
$\overline{A(B(0,r))}$ separoituva
(Metrisen avaruuden $\mathbb{X}$ kompakti joukko on separoituva:
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in \mathbb{X}\}$ $\mathbb{X}$:n av. peite $\overset{\mathbb{X}\text{ kpt.}}{\Rightarrow}$ $\{B(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nva peite
$\{x_i^{(n)} \mid i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ tiheä (ja numeroituva);
Jos $U \subset_o \mathbb{X}$, niin $x_i^{(n)} \in B(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}) \subset U$ jollakin $i, n \in \mathbb{N}$)

$\mathrm{Im} A = \bigcup_{r=1}^{\infty} A(B(0,r))$ nva yhdiste separoituvia $A(B(0,r)) \subset \overline{A(B(0,r))}$

$\Rightarrow \mathrm{Im} A$ separoituva $\Rightarrow \overline{\mathrm{Im} A}$ separoituva. □.

Huom (b) myös "suurilla" (separoitumattomilla) $\mathbb{X}$ $\mathrm{Im} A$ on 'pieni' (separoituva) kun A kompakti (vrt. äärell. ul. avaruuksien operaattorit)

Kompaktius säilyy rajankäynnissä:

12.6. <u>Lause</u> Ol. $\overline{X}$ normiavaruus, $\overline{Y}$ Banach ja $(A_k) \subset K(\overline{X}, \overline{Y})$ s.e. $A_k \to A \in \mathcal{L}(\overline{X}, \overline{Y})$. Tällöin A on kompakti. Siis $K(\overline{X}, \overline{Y}) \subset \mathcal{L}(\overline{X}, \overline{Y})$ on suljettu

<u>Tod</u>: Ol. $(x_n) \subset \overline{X}$ rajoitettu

A_1 kompakti $\Rightarrow \exists$ osajono $(x_{n(1,k)})$ s.e. jono $(A x_{n(1,k)})$ suppenee

A_2 kompakti $\Rightarrow \exists$ jonon $(x_{n(1,k)})$ osajono $(x_{n(2,k)})$ s.e. $(A_2 x_{n(2,k)})$ suppenee. Myös $(A_1 x_{n(2,k)})$ suppenee (suppenevan osajonon osajonona) jatketaan induktiivisesti, saadaan: $\forall j \in \mathbb{N}$ osajono $(x_{n(j,k)})$ s.e. $\forall\ i \leq j$ jono $(A_i x_{n(j,k)})$ suppenee.

Aset $n(k) = n(k,k)$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Jono $(x_{n(k)})$ s.e. $\forall i$: $(A_i x_{n(k)})$ suppenee kun $k \to \infty$. ("Cantorin diagonaalisointi")

V: $(A x_{n(k)})$ suppenee.

Riittää os $(A x_{n(k)}) \subset \overline{Y}$ Cauchy-jono ($\overline{Y}$ Banach!)

Ol. $\varepsilon > 0$ $(x_{n(k)}) \subset \overline{X}$ rajoitettu $\Rightarrow \exists\ C > 0$ s.e.

$\|x_{n(k)}\| \leq C$ $\forall k$

$\|A_k - A\| \to 0 \Rightarrow \exists\ \mathbb{N} \ni K \geq 1$ s.e. $\|A_K - A\| < \varepsilon / 3C$

$(A_K x_{n(k)})$ supp. $\Rightarrow \exists\ \mathbb{N} \ni R \geq 1$ s.e. jos $k, r \geq R$ niin $\|A_K x_{n(k)} - A_K x_{n(r)}\| < \varepsilon/3$

$\Rightarrow \forall\ k, r \geq R$ pätee:

$$\|A x_{n(k)} - A x_{n(r)}\| \leq \|A x_{n(k)} - A_K x_{n(k)}\| + \|A_K x_{n(k)} - A_K x_{n(r)}\|$$

$$+ \|A_K x_{n(r)} - A x_{n(r)}\| \leq 2\|A - A_K\| C + \varepsilon/3 < \varepsilon. \square$$

12.7. <u>Seuraus</u> Jos $\overline{X}$ normiavaruus, $\overline{Y}$ Banach-avaruus, $(A_k) \subset \mathcal{L}(\overline{X}, \overline{Y})$ s.e. $\dim \operatorname{Im}(A_k) < \infty$ ja $A_k \to A \in \mathcal{L}(\overline{X}, \overline{Y})$. Tällöin A on kompakti.

<u>Tod</u>: 12.4. (c) $\Rightarrow$ A_k kompakti $\overset{12.6.}{\Rightarrow}$ A kompakti.

Standardi menetelmä konstruoida annetusta operaattorista A jono $A_k \to A$, $\dim \operatorname{Im} A_k < \infty$ kompaktiuden osoittamiseksi!

Esim $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ $A(a_n)_n = (n^{-1}a_n)_n$ on kompakti! (12.4.)

Tod: $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ (HT)

$\forall k \in \mathbb{N}$ aset. $A_k \in \mathcal{L}(\ell^2)$ s.e. $A_k(a_n)_n = (b_n^k)_n$,

missä $b_n^k = \begin{cases} n^{-1}a_n, & \text{kun } n \le k \\ 0, & \text{kun } n > k \end{cases}$

$A_k \in \mathcal{L}(\ell^2)$ ja $\dim \operatorname{Im} A_k < \infty$, $\forall a \in \ell^2$:

$$\|(A_k - A)a\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^2/n^2 \le (k+1)^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^2 \le (k+1)^{-2}\|a\|$$

$\Rightarrow \|A_k - A\|^2 \le (k+1)^{-2} \to 0$ kun $k \to \infty$

12.7 $\Rightarrow$ A kompakti. $\square$

12.8. **Lause** Ol. X normiavaruus, H Hilbert-avaruus ja $A \in K(X, H)$. Tällöin $\exists$ jono $(A_k) \subset \mathcal{L}(X, H)$ s.e. $\dim \operatorname{Im}(A_k) < \infty$ ja $A_k \to A$ $\mathcal{L}(X,H)$:ssa.

Tod: Jos $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ voi val $A_k = A$ $\forall k$.

L. 12.5 $\Rightarrow$ $\overline{\operatorname{Im} A}$ separoituva, Hilbert avaruus (sulj.!)

Ol. $\dim \operatorname{Im} A = \infty$

L. 5.24 $\Rightarrow$ $\exists$ ortom. kanta $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$\forall k \ge 1$ olk. P_k ortoprojektio $\overline{\operatorname{Im} A} \to M_k = \operatorname{sp}\{e_1, \dots e_k\}$.

Aset. $A_k = P_k A$. $\operatorname{Im} A_k \subset M_k \Rightarrow \dim \operatorname{Im} A_k < \infty$.

Os. $\|A_k - A\| \to 0$ kun $k \to \infty$.

Jos $\|A_k - A\| \not\to 0$ niin tarvittaessa siirtymällä osajonoon löytyy $\varepsilon > 0$ s.e. $\|A_k - A\| \ge \varepsilon$ $\forall k$

$\Rightarrow \exists$ jono vektoreita $(x_k) \subset X$ $\|x_k\| = 1$ s.e.

$\|(A_k - A)x_k\| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k$.

A kompakti $\Rightarrow$ voi ol. $Ax_k \to y$ jollakin $y \in H$ (tarvittaessa siirrytään osajonoon)

L. 5.18 $\Rightarrow$ $P_k y = \sum_{i=1}^{k} (y|e_i) e_i$, saadaan

$$(A_k - A)x_k = (P_k - I)Ax_k = (P_k - I)y + (P_k - I)(Ax_k - y)$$

$$= -\sum_{i=k+1}^{\infty} (y|e_i)e_i + (P_k - I)(Ax_k - y).$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\varepsilon}{2} \le \|(A_k - A)x_k\| \underset{\substack{L.6.15 \\ \|P_k\| \le 1}}{\le} \Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} |(y|e_i)|^2\Big)^{1/2} + 2\|Ax_k - y\|$$

$\to 0$ kun $k \to \infty$ ↯

↙ .L

OS. Jos A kompakti, niin A^* on kompakti. (12.5.)

12.9. Lause Ol. H Hilbertin avaruus, $A \in \mathcal{L}(H)$.
Tällöin $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^*)$.

Tod: Ol. $\mathrm{rank}(A) < \infty$. $\forall x \in H$ kirj. $x = u + v$,
missä $u \in \ker A^*$, $v \in (\ker A^*)^\perp \overset{11.5(ii)}{=} \mathrm{Im}(A)^{\perp\perp} \overset{5.14b}{=} \overline{\mathrm{Im}(A)}$
$= \mathrm{Im}(A)$ $(\dim \mathrm{Im}(A) < \infty)$ $\Rightarrow$
$A^* x = A^* u + A^* v = A^* v \Rightarrow \mathrm{Im}\, A^* = A^*(\mathrm{Im}\, A)$
$\Rightarrow \mathrm{rank}\, A^* \le \mathrm{rank}\, A$
sovelletaan tulosta operaattoriin $A^* \Rightarrow \mathrm{rank}\, A =$
$\mathrm{rank}(A^*)^* \le \mathrm{rank}\, A^*$.
Saadaan myös: ei voi olla yhtäaikaa ($\mathrm{rank}\, A < \infty$ ja $\mathrm{rank}\, A^* = \infty$) tai ($\mathrm{rank}\, A^* = \infty$ ja $\mathrm{rank}\, A < \infty$) $\square$

12.10. Lause Jos H Hilbertin avaruus ja $A \in \mathcal{L}(H)$ niin
A on kompakti $\Leftrightarrow$ A^* kompakti.

Tod: Ol A kompakti $\Rightarrow$ (L.12.8) $\exists$ jono $(A_k) \subset \mathcal{L}(H)$
$\mathrm{rank}(A_k) < \infty$ s.e. $\|A - A_k\| \to 0 \overset{12.9}{\Rightarrow} \mathrm{rank}\, A_k^* < \infty$
$\overset{L.11.4}{\Rightarrow} \|A_k^* - A^*\| = \|A_k - A\| \to 0 \overset{L.12.6}{\Rightarrow} A^*$ kompakti.
Sov. tätä tulosta tapaukseen A^* kompakti $\Rightarrow$ $A (= A^{**})$ kompakti

12.11. Määritelmä Ol H ääretönulotteinen Hilbertin avaruus
ja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sen ortonorm. kanta, Ol. $A \in \mathcal{L}(H)$.
Jos pätee $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$ niin A on Hilbert-Schmidt operaattori.

12.12. Lause Ol. H Hilbert-avaruus $\dim(H) = \infty$,
$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ H:n ortonormaaleja kantoja, $A \in \mathcal{L}(H)$.
Tällöin pätee:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A^* f_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|^2$ (summa voi olla ∞)

erityisesti: H-S operaattorin määritelmä riippumaton valitusta kannasta

(ii) A on H-S $\Leftrightarrow$ A^* on H-S

(iii) Jos A on H-S niin se on kompakti

(iv) $\{A \in \mathcal{L}(H) \mid A \text{ on H-S}\} \subset \mathcal{L}(H)$ on v.a.a.

Tod: HT