9. Dualiteetti ja Rieszin esityslause

Ol. X vektoriavaruus, niin merkitään
$X^* = L(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f$ lineaarinen$\}$
avaruuden X <u>algebrallinen duaali</u>.

X^*:n alkiot avaruuden X lineaarisia muotoja
Jos $f \in X^*$ ja $x \in X$ usein merkitään
$\langle x, f \rangle = f(x)$.
Ehto $(x,f) \longmapsto \langle x, f\rangle$ määrää kanonisen bilineaarimuodon $X \times X^* \to \mathbb{K}$.

Kuten edellä nähtiin yl. normiavaruuden X tapauksessa
$f \in X^*$ voi olla epäjatkuva.

9.1. <u>Määritelmä</u> Jos X on normiavaruus, niin
$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f$ jatkuva, lin.$\}$
on avaruuden X (topologinen) <u>duaali</u>.

$X' \subset X^*$ v.a.a. Jos X äärellisulotteinen, niin
$X' = X^*$ (L.4.6)

Duaaliavaruuden X' luonnollinen normi : $\|f\|_{X'} = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |\langle x, f\rangle|$

$$\left(= \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)| \right)$$

9.2. <u>Lause</u> Jos X on normiavaruus, niin
$(X', \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus.

Tod: L. 4.4., sillä $\mathbb{K}$ täydellinen.

<u>Huom</u> Avaruuden X täydellisyyttä ei tarvita!

X':n alkiot ovat (lineaarisia, jatkuvia) <u>funktionaaleja</u> avaruudessa X.
Päke: $|\langle x, f\rangle| \le \|x\|_X \|f\|_{X'}$.

Esim 1° Ol $1 < p < \infty$ ja $q = \frac{p}{p-1}$ eli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
(p, q duaalieksponentteja)

Os. $(\ell^p, \|\cdot\|_p)' \cong (\ell^q, \|\cdot\|_q)$

Olk. $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1\ \text{kpl}}, 1, 0, \dots) \in \ell^p \quad \forall k \in \mathbb{N}$

ja $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ kun $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $n \in \mathbb{N}$

Tällöin $\lim_{n\to\infty} \|x - S_n(x)\|_p = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k e_k\|_p$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = 0$ eli $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$

Jos $x' \in (\ell^p)'$, $x \in \ell^p$, $n \in \mathbb{N}$ niin

$\langle S_n(x), x'\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, x'\rangle =: \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = x$, x' jatkuva $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle S_n(x), x'\rangle = \langle x, x'\rangle$

$\therefore \langle x, x'\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \qquad (*)$

Os. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$:

Merk. $\alpha_k = \begin{cases} \frac{|y_k|^q}{y_k}, & y_k \neq 0 \\ 0, & y_k = 0 \end{cases}$ ja

aset. $w_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \ell^p$

$\Rightarrow \|w_n\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \quad (\circledast)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \langle w_n, x'\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q =: C$

$= |\langle w_n, x'\rangle| \le \|x'\| \|w_n\|_p \overset{(\circledast)}{=} \|x'\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p} = C^{1/p}\|x'\|$

$C^{-1/p}|$

$\Rightarrow C^{1-1/p} = C^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \le \|x'\|$

$\therefore y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ ja $\|y\|_q \le \|x'\|$

(9.3.)

Aset. $A: (\ell^p)' \to \ell^q$ s.e. $Ax' = y$ $(= (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\langle e_k, x'\rangle)_{k\in\mathbb{N}})$

A on lin. ja $\|Ax'\|_q \le \|x'\|$ eli A jatkuva

A inj : Ol. $Ax' = 0 \Rightarrow \langle e_k, x'\rangle = 0 \ \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$$\langle S_n(x), x'\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, x'\rangle = 0 \quad \forall \ (x_k)\in \ell^p \ \forall n\in\mathbb{N}$$

$\lim S_n(x) = x$, x' jva $\Rightarrow$ $\langle x, x'\rangle = 0 \quad \forall \ x\in\ell^p \Rightarrow x' = 0$.

A surj :

Jos $x = (x_k)\in\ell^p$ ja $y = (y_k)\in\ell^q$, niin Hölder $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\Big)^{1/q} \quad \text{joten}$$

kuvaus $\Lambda_y : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ on jva lin. $\ell^p \to K$

eli $\Lambda_y \in (\ell^p)'$ ja $\|\Lambda_y\| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\Big)^{1/q}$.

Aset. $S: y \mapsto \Lambda_y$, $S: \ell^q \to (\ell^p)'$ lin. ja

$\|Sy\| \le \|y\|_q \quad \forall \ y\in\ell^q$

$\Rightarrow \langle e_k, Sy\rangle = y_k \quad \forall \ k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow ASy = (\langle e_k, \Lambda_y\rangle) = (y_k) = y$

$\therefore A((\ell^p)') = \ell^q$

$\therefore$ A bijektio ja $S = A^{-1}$

A homeo : Jos $x'\in(\ell^p)'$ ja $y = Ax'$ niin $Sy = x'$ ja

$$\|x'\| = \|Sy\| \le \|y\|_q = \|Ax'\|_q \le \|x'\|$$

$\therefore \|Ax'\|_q = \|x'\|$ joten A homeomorfismi

ja isometrinen isomorfismi $(\ell^p)' \to \ell^q$.

Void. samastaa $(\ell^p)' \simeq \ell^q$. Merk. $p' = q$.

Symmetria $p \leftrightarrow q \Rightarrow \ell^p \cong (\ell^q)'$

$\Rightarrow ((\ell^p)')' \cong (\ell^q)' \cong \ell^p$

$\therefore$ ℓ^p <u>refleksiivinen</u> kun $1 < p < \infty$.

Tark. nyt dualisuutta Hilbertin avaruuksilla.

Ol. H Hilbertin avaruus, $x \in H$. $f_x : H \to \mathbb{K}$ kuvaus

$$z \mapsto (z|x), \quad z \in H.$$

f_x lin., Cauchy–Schwarz: $|f_x(z)| = |(z|x)| \leq \|z\| \|x\|$
joten $\forall x \in H$ f_x on jatkuva eli $f_x \in H'$.
Myös käänteinen pätee:

9.3. <u>Fréchet–Rieszin lause</u> ("Rieszin esityslause")

Ol. H Hilbertin avaruus ja $f_x : f_x(z) = (z|x)$ kun $x \in H$ ja $z \in H$. Kuvaus $\Lambda : x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen isometrinen bijektio $H \to H'$

Tod. liittolin: $\Lambda(\lambda x + y)(z) = f_{\lambda x + y}(z) = (z|\lambda x + y)$
$= \bar{\lambda} f_x(z) + f_y(z)$.

Kuten yllä $f_x \in H'$ ja $\|f_x\| \leq \|x\|$.
Toisaalta:

$0 \leq \|x\|^2 = (x|x) = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \|f_x\| \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|f_x\|$.

$\therefore$ $\Lambda : H \to H'$ isometria. $\Rightarrow$ Λ injektio

Os. <u>Λ surjektio</u>:

Ol. $f \in H'$. Jos $f = \bar{0}$ niin $f(z) = (z|0)$ $\forall z \in H$ eli $f = f_{\bar{0}}$.

f jatkuva $\{0\} \subset\subset \mathbb{K} \Rightarrow M := f^{-1}\{0\} \subset\subset H$.

2.5.14 $\Rightarrow H = M \oplus M^\perp$. $f \neq \bar{0} \Rightarrow M \neq H \Rightarrow M^\perp \neq \{\bar{0}\}$

$\Rightarrow \exists\ \bar{0} \neq y \in M^\perp$.

Ol. $z \in H$. Pätee:

$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0$

$\Rightarrow f(z)y - f(y)z \in \ker(f) = M$

$y \in M^\perp \Rightarrow 0 = (f(z)y - f(y)z \,|\, y) = f(z)(y|y) - f(y)(z|y)$

$y \neq \bar{0} \Rightarrow (y|y) = \|y\|^2 > 0 \Rightarrow f(z) = \left(z \,\middle|\, \dfrac{\overline{f(y)}}{\|y\|^2} y\right)$

$\forall z \in H$.

$=: (z|x)$

$\therefore \; f(z) = (z \mid x) = f_x(z) \quad \forall\, z \in H \;\Rightarrow f = f_x$
ja Ω surjektio. $\square$.

Saatiin: $\forall$ Hilbertin avaruuden H jokainen jatkuva lineaarimuoto $f: H \to \mathbb{K}$ voidaan esittää sisätulon avulla muodossa $z \mapsto (z \mid x)$, missä $x \in H$ on 1-täs. ja $\|f\| = \|x\|$. Kuvaus $x \mapsto f_x$ on kanoninen kuvaus $H \to H'$.

$H' \simeq H \Rightarrow H'' \simeq H' \simeq H$ eli $\forall$ Hilbertin avaruus on refleksiivinen.

9.4. Lause a) Ol $c = (c_n) \in \ell^\infty$, $(x_n) \in \ell^1$. Tällöin $(c_n x_n) \in \ell^1$. Jos määrit. lin. kuvaus $f_c : \ell^1 \to \mathbb{K}$ asettamalla $f_c((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ niin $f_c \in (\ell^1)'$ ja $\|f_c\| \le \|c\|_\infty$

b) Jos $f \in (\ell^1)'$ niin $\exists\, c \in \ell^\infty$ s.e. $f = f_c$ ja $\|c\|_\infty \le \|f\|$

c) $(\ell^1)' \simeq \ell^\infty$

Tod: a) Yleisemmin $\forall\, p \in [1, \infty)$: Jos $(c_n) \in \ell^\infty$ ja $(x_n) \in \ell^p$ niin $(c_n x_n) \in \ell^p$: $\lambda := \|(c_n)\|_\infty = \sup\{|c_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ pätee

$$|c_n x_n|^p \le \lambda^p |x_n|^p \quad \text{Vertailutesti} \Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p$ suppenee $\therefore (c_n x_n) \in \ell^p$ ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p \le \|(c_n)\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

Erit. siis kun $p = 1$. Lin kuvaus $f_c : \ell^1 \to \mathbb{K}$

$$f_c((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \quad \text{on jatkuva :}$$

$$|f_c((x_n))| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \le \|(c_n)\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

$$= \|(c_n)\|_\infty \|(x_n)\|_1 \quad \therefore \; f_c \in (\ell^1)'$$

ja $\|f_c\| \le \|(c_n)\|_\infty$.

b) Ol. $(\tilde{e}_n) \subset \ell^1$ $\quad \tilde{e}_n = (0, \dots 0, \overset{n}{1}, 0, \dots)$

ja $c_n = f(\tilde{e}_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Nyt

$$|c_n| = |f(\tilde{e}_n)| \leq \|f\| \|\tilde{e}_n\| = \|f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

joten $c = (c_n) \in \ell^\infty$ ja $\|c\|_\infty \leq \|f\|$.

Ol. S ℓ^1:in v.a.a. jonka alkioita ovat kaikki ne ℓ^1:n jonot joissa vain äärellisen monta alkiota $\neq 0$. S tiheä ℓ^1:ssä. Olk. $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0, \dots)$

Tällöin

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j \tilde{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\tilde{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j c_j = f_c(x)$$

f, f_c jatkuvia ja yhtyvät tiheässä joukossa S

$\Rightarrow f = f_c$.

c) Kuvaus $A : \ell^\infty \to (\ell^1)'$ $\quad A(c) = f_c$ on lin.

ja b) $\Rightarrow$ $A(\ell^\infty) = (\ell^1)'$

$$\|c\|_\infty \overset{b)}{\leq} \|f_c\| \overset{(a)}{\leq} \|c\|_\infty$$

$\Rightarrow \|A(c)\| = \|f_c\| = \|c\|_\infty$ eli A isometria. $\square$

Huom. Vastaava kuvaus $\tilde{A} : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $x \mapsto \sum_{n=1}^\infty c_n x_n$, $(c_n) \in \ell^1$ ei ole surjektio! (Nähdään pian ...)

10. Hahn-Banachin lause ja sovelluksia

Kuvauksen $A \in \mathcal{L}(M, Y)$ jatkaminen, kun $M \subset\subset H$ v.a.a.
H Hilbertin av., Y normiavaruus ?
$\exists\, A_1 \in \mathcal{L}(H, Y)$ s.e. $A_1 x = Ax \quad \forall\, x \in M$ ja $\|A_1\| = \|A\|$.
idea: Aset. ortoprojektio $P_M : H \to M$ ja
$A_1 := A \circ P_M$.

Jos X Banach jatkamisongelmaka ei aina ratkaisua.
Esim. $M = c_0$, $X = \ell^\infty$, $M \subset\subset X$.
Val $Y = c_0$ ja $A \in \mathcal{L}(M, Y)$ s.e. $A = Id_{c_0}$.
$\nexists\, A_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ s.e. $A_1 x = Ax \quad \forall\, x \in M$.
(Tod: Werner s. 163.)

10.1. Lause Ol. X $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus.
Ol. $M \subsetneq X$ v.a.a, p puolinormi avaruudessa X ja
$f : M \to \mathbb{R}$ lin. s.e. $|f(u)| \le p(u) \quad \forall\, u \in M$.
Jos $z \in X \setminus M$ ja $M_1 = M \oplus \operatorname{span}(z)$, niin $\exists$ lin.
$f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ s.e. $f_1(u) = f(u) \quad \forall\, u \in M$ ja
$|f_1(w)| \le p(w) \quad \forall\, w \in M_1$.

Tod: Ol. $x, y \in M$. Pätee

$$f(x) - f(y) = f(x-y) \le p(x-y) \overset{\Delta\text{-ey}}{\le} p(x+z) + p(-y-z) \overset{\text{homog.}}{=} p(x+z) + p(y+z).$$

$\Rightarrow$

$$-p(y+z) - f(y) \le p(x+z) - f(x) \quad \forall\, x, y \in M$$

$$\Rightarrow \sup_{y \in M} \left(-p(y+z) - f(y)\right) \le p(x+z) - f(x)$$

$$\Rightarrow \sup_{y \in M} \left(-p(y+z) - f(y)\right) \le \inf_{x \in M} \left(p(x+z) - f(x)\right)$$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ s.e. pätee

$$(*) \qquad -p(y+z) - f(y) \le c \le p(x+z) - f(x) \quad \forall\, x, y \in M.$$

Liite. Zornin lemma

Tämä liite käsittelee joukko-oppia ja järjestysteoriaa eikä lainkaan topologiaa. Esitämme valinta-aksioman ja johdamme siitä Zornin lemman, jota tarvittiin Tihonovin lauseen 18.4 todistuksessa.

Oletamme oikeaksi seuraavan joukko-opin aksioman:

Z.1. **Valinta-aksioma.** *Jos $J \neq \varnothing$ on joukko ja jos A_j on epätyhjä joukko jokaisella $j \in J$, niin tulojoukko $\prod_{j\in J} A_j$ ei ole tyhjä.*

Z.2. *Huomautuksia.* Valinta-aksioma sanoo siis, että on olemassa sellainen kuvaus $f: J \to \bigcup\{A_j : j \in J\}$, että $f(j) \in A_j$ kaikilla $j \in J$. Kuvaus f on *valintafunktio*, joka *valitsee* kustakin joukosta A_j alkion $f(j)$. Valinta-aksioma tuntunee useimpien ihmisten mielestä selvältä, ja sitä on käytetty tässä kirjassa ja myös osassa I ilman eri mainintaa.

Esimerkkinä tarkastelemme Lauseen 12.8 todistusta, jossa osoitettiin, että jos $x \in \bar{A}$ N_1-avaruudessa X, niin on olemassa A:n jono, joka suppenee kohti x:ää. Todistuksessa valittiin x:n ympäristökanta $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ ja pisteet $x_n \in A \cap U_n$. Näin saatiin vaadittu jono (x_n). Tässä kuitenkin käytettiin valinta-aksiomaa, sillä kyseinen jono on tulojoukossa $\prod_{n\in \mathbb{N}}(A \cap U_n)$. Tosin tässä riitti se tapaus, jossa indeksijoukko on numeroituva.

Zornin lemma liittyy järjestysteoriaan, ja siksi käsittelemme aluksi järjestysteorian perusteita.

Z.3. *Järjestys.* Joukon H relaatio $\leq$ on *järjestys*, jos kaikilla $a, b, c \in H$ on voimassa

(1) $a \leq a$,

(2) $a \leq b \leq a \Rightarrow a = b$,

(3) $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Järjestys $\leq$ on *täysi*, jos lisäksi on voimassa

(4) Jos $a, b \in H$, niin $a \leq b$ tai $b \leq a$.

Jos $\leq$ on H:n järjestys, sanotaan paria $(H, \leq)$ *järjestetyksi joukoksi.*

Useissa kirjoissa sanotaan edellä määriteltyä järjestystä osittaiseksi järjestykseksi ja täyttä järjestystä järjestykseksi.

Olkoon $(H, \leq)$ järjestetty joukko. Jos $a \leq b$, merkitään $b \geq a$. Jos lisäksi $a \neq b$, merkitään $a < b$ ja $b > a$. Järjestys $\leq$ indusoi luonnollisella

tavalla jokaiseen H:n osajoukkoon K järjestyksen. Jos K:n järjestys on täysi, sanomme, että K on H:n *ketju.*

Esimerkki. Olkoon X joukko. Tällöin $\subset$ on järjestys joukossa $\mathcal{P}(X)$. Tämä järjestys ei ole täysi, paitsi jos $\#X \leq 1$. Jos esim. $X = \mathbb{R}$, niin eräs ketju on $\{[-a, a] : a > 0\}$.

Olkoon $A \subset H$. Alkio $b \in H$ on A:n *yläraja*, jos $b \geq a$ kaikilla $a \in A$. Jos lisäksi $b \in A$, niin b on A:n *suurin* alkio. Alkio $b \in A$ on A:n *maksimaalinen* alkio jos ei ole olemassa sellaista $a \in A$, että $b < a$. Vastaavasti määritellään käsitteet *alaraja*, *pienin* alkio ja *minimaalinen* alkio. Joukossa voi olla vain yksi suurin ja yksi pienin alkio, mutta useita maksimaalisia ja minimaalisia alkioita. Suurin alkio on aina maksimaalinen ja pienin alkio minimaalinen.

Esim. joukon $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ osajoukon $A = \{[0, 2], [1, 3]\}$ molemmat alkiot ovat sekä maksimaalisia että minimaalisia A:n alkioita.

Olkoon A edelleen järjestetyn joukon H osajoukko. Jos A:n ylärajojen joukossa on pienin alkio, se on A:n *pienin yläraja*, ja sille käytetään merkintää $\sup A$. Tällaisia voi joukolla olla enintään yksi. Vastaavasti määritellään *suurin alaraja* $\inf A$.

Joukon $\mathcal{P}(X)$ jokaisella osajoukolla $\mathcal{A}$ on olemassa järjestyksen $\subset$ suhteen $\sup \mathcal{A} = \cup\mathcal{A}$ ja $\inf \mathcal{A} = \cap\mathcal{A}$. Tällöin sovitaan, että $\cup\varnothing = \varnothing$ ja $\cap\varnothing = X$.

Z.4. **Zornin lemma.** *Olkoon $(H, \leq)$ sellainen järjestetty joukko, että $H \neq \varnothing$ ja H:n jokaisella ketjulla K on pienin yläraja $\sup K \in H$. Tällöin H:ssa on ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Z.5. *Huomautus.* Zornin lemmasta voi sanan "pienin" jättää pois (tehtävä Z:2), mutta tarvitsimme tulosta vain yllä olevassa muodossa.

Z.6. *Zornin lemman todistus.* Seuraava todistus ei ole lyhyin mahdollinen, mutta tekijän mielestä selvin ja helppotajuisin.

Teemme vastaoletuksen: H:ssa ei ole maksimaalista alkiota. Jokaisella $x \in H$ merkitään

$$S(x) = \{y \in H : y > x\}.$$

Vastaoletus merkitsee, että $S(x) \neq \varnothing$ kaikilla $x \in H$. Sovellamme valinta-aksiomaa joukkoihin $S(x)$ indeksijoukkona H. Sen nojalla on olemassa sellainen $f: H \to H$, että $f(x) \in S(x)$ eli $f(x) > x$ kaikilla $x \in H$.

Valitsemme alkion $a_0 \in H$, jota koko todistuksen ajan pidämme kiinteänä. Sanomme, että joukko $Z \subset H$ on *Zornin joukko*, jos se toteuttaa ehdot:

(1) $a_0 \in Z$.

(2) Jos $x \in Z$, niin $f(x) \in Z$.

(3) Jos K on ketju ja $\varnothing \neq K \subset Z$, niin $\sup K \in Z$.
Esimerkiksi joukko $\{x \in H : x \geq a_0\}$ on selvästi Zornin joukko. Olkoon Z_0 kaikkien Zornin joukkojen leikkaus, jolloin

$$a_0 \in Z_0 \subset \{x \in H : x \geq a_0\}.$$

Osoitamme aluksi, että Z_0 on Zornin joukko. Ehto (1) todettiin jo. Jos $x \in Z_0$, niin $x \in Z$ ja siis $f(x) \in Z$ kaikilla Zornin joukoilla Z, mistä seuraa, että $f(x) \in Z_0$, joten (2) pätee. Olkoon K ketju ja $\varnothing \neq K \subset Z_0$. Tällöin $K \subset Z$ ja siis $\sup K \in Z$ jokaisella Zornin joukolla Z, mistä seuraa, että $\sup K \in Z_0$, joten (3) on voimassa.

Väite 1. Z_0 on ketju.

Todistamme tämän myöhemmin, mutta osoitamme heti, miten siitä seuraa haluttu ristiriita. Ehdosta (3) seuraa, että $\sup Z_0 \in Z_0$, joten ehdon (2) nojalla $f(\sup Z_0) \in Z_0$, mistä seuraa, että $f(\sup Z_0) \leq \sup Z_0$. Tämä on mahdotonta, koska $f(x) > x$ kaikilla $x \in H$.

Merkitsemme A:lla niiden alkioiden $a \in Z_0$ joukkoa, joilla ehdoista $x \in Z_0$, $x < a$ seuraa $f(x) \leq a$. Jokaisella $a \in A$ merkitään

$$B(a) = \{x \in Z_0 : x \leq a \text{ tai } x \geq f(a)\}.$$

Väite 2. $B(a) = Z_0$ jokaisella $a \in A$.

Riittää osoittaa, että $B(a)$ on Zornin joukko.

(1): Koska $Z_0 \subset \{x : x \geq a_0\}$, niin $a_0 \leq a$, ja siis $a_0 \in B(a)$.

(2): Olkoon $x \in B(a)$. Tällöin on kolme mahdollisuutta:

(a) $x < a$. Tällöin A:n määritelmän nojalla $f(x) \leq a$.

(b) $x = a$. Nyt $f(x) = f(a)$.

(c) $x \geq f(a)$. Nyt $f(x) > x \geq f(a)$.

Siis kaikissa tapauksissa $f(x) \in B(a)$.

(3): Olkoon K ketju ja $\varnothing \neq K \subset B(a)$. Erotamme kaksi tapausta:

(a) a on K:n yläraja. Tällöin $\sup K \leq a$, joten $\sup K \in B(a)$.

(b) a ei ole K:n yläraja. Tällöin on olemassa sellainen $k \in K$, että ehto $k \leq a$ ei ole voimassa. Koska $k \in B(a)$, niin $k \geq f(a)$. Siis $\sup K \geq f(a)$, joten $\sup K \in B(a)$.

Väite 2 on todistettu.

Väite 3. $A = Z_0$.

Riittää taas osoittaa, että A on Zornin joukko.

(1): $a_0 \in A$, koska $x \geq a_0$ kaikilla $x \in Z_0$.

(2): Olkoon $a \in A$. On osoitettava, että $f(a) \in A$. Sitä varten oletamme, että $x \in Z_0$ ja $x < f(a)$. Väitteestä 2 seuraa, että $x \in B(a)$. Siis $x \leq a$. Jos $x < a$, niin A:n määritelmän nojalla $f(x) \leq a < f(a)$. Jos $x = a$, niin $f(x) = f(a)$. Siis aina $f(x) \leq f(a)$, joten $f(a) \in A$.

(3): Olkoon K ketju ja $\varnothing \neq K \subset A$. On osoitettava, että $\sup K \in A$. Koska Z_0 on Zornin joukko, niin $\sup K \in Z_0$. Olkoon $x \in Z_0$ ja $x < \sup K$. Väitämme, että $f(x) \leq \sup K$. Erotamme kaksi tapausta:

(a) On olemassa $k \in K$, jolla $x < k$. Koska $k \in A$, niin $f(x) \leq k \leq \sup K$.

(b) Tällaista alkiota k ei ole. Osoitamme, että tämä tapaus ei koskaan esiinny. Koska Väitteen 2 mukaan jokaisella $k \in K$ on $x \in Z_0 = B(k)$, niin kaikilla $k \in K$ on joko $x = k$ tai $x \geq f(k) > k$. Siis x on K:n yläraja, joten $\sup K \leq x$, mikä on vastoin oletusta.

Väite 3 on todistettu.

Todistamme nyt Väitteen 1. Olkoot $a, b \in Z_0$. Väitteen 3 nojalla $a \in A$, joten $B(a)$ on määritelty. Väitteen 2 nojalla $b \in B(a)$, joten joko $b \leq a$ tai $b \geq f(a) > a$. Siis Z_0 on ketju, joten Väite 1 ja sen mukana Zornin lemma on todistettu. □

Z.7. *Huomautuksia*. 1. Voidaan osoittaa, että käänteisesti Zornin lemmasta seuraa valinta-aksioma. Tämän vuoksi näkee joskus sanottavan, ettei Zornin lemmaa voi todistaa, ja joskus jopa tähän vedoten otetaan Zornin lemma käyttöön aksiomana ilman perusteluja. On kuitenkin todettava, että Zornin lemman muotoilu on siinä määrin abstrakti ja mutkikas, että tuskin kenenkään intuitio sanoo ensi näkemältä sen totuudesta sitä tai tätä. Sen, joka käyttää Zornin lemmaa, on tunnettava sen todistus.

2. Joukko-opissa on useita muitakin lauseita, jotka ovat yhtäpitäviä valinta-aksioman ja siis myös Zornin lemman kanssa. Vanhin näistä on kuuluisa *hyvän järjestyksen lause*. Joukon järjestys on *hyvä*, jos sen jokaisella epätyhjällä osajoukolla on suurin alaraja. Esim. N:n tavallinen järjestys on hyvä, mutta joukkojen Z ja I järjestys ei ole hyvä. Hyvän järjestyksen lauseen mukaan jokaisessa joukossa on olemassa olemassa hyvä järjestys.

3. Muita valinta-aksioman kanssa yhtäpitäviä lauseita ovat Tihonovin lause (tehtävä Z:6) ja Hausdorffin maksimaaliperiaate (tehtävä Z:1).

Tehtäviä Z

Z:1 Todista *Hausdorffin maksimaaliperiaate*: Olkoon $(H, \leq)$ järjestetty joukko ja olkoon $K_0 \subset H$ ketju. Tällöin K_0 sisältyy johonkin H:n maksimaaliseen ketjuun, ts. sellaiseen, joka ei aidosti sisälly mihinkään H:n ketjuun. *Ohje*. Sovella Zornin lemmaa joukkoon $\{K : K_0 \subset K \subset H \text{ ja } K \text{ on ketju}\}$.

Z:2 Todista edellisen tehtävän avulla, että Zornin lemmasta voidaan sana "pienin" jättää pois.

Z:3 Olkoon $(H, \leq)$ järjestetty joukko. Joukko $B \subset H$ on H:n *kanta*, jos jokaista $x \in H$ kohti on olemassa sellainen $A \subset B$, että $x = \sup A$. Osoita, että jos $(X, \mathcal{T})$

Jos $w \in M_1 = M \oplus \text{span}\{z\}$, niin $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ 1-käsitteiset.

Aset. $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ s.e. $f_1(w) = f_1(u + \lambda z) := f(u) + \lambda c$.

$f_1 \in M_1^*$ ja $f_1(u) = f(u)$ $\forall\, u \in M$.

Os. $|f_1(w)| \leq p(w)$:

Tapaus $\lambda = 0$ selvä. Ol. $\lambda \neq 0$:

(*) $x = \lambda^{-1} u = y$

$$-p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u) \leq c \leq p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u) \quad \forall u \in M$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{|\lambda|} p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda} f(u) \leq c \leq \frac{1}{|\lambda|} p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda} f(u)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{|\lambda|} p(w) \leq c + \frac{1}{\lambda} f(u) \leq \frac{1}{|\lambda|} p(w)$$

Pätee: $c + \frac{1}{\lambda} f(u) = \frac{1}{\lambda}\left(f(u) + \lambda c\right) = \frac{1}{\lambda} f_1(w) \Rightarrow$

$$-\frac{1}{|\lambda|} p(w) \leq \frac{1}{\lambda} f_1(w) \leq \frac{1}{|\lambda|} p(w)$$

$$\Rightarrow \quad |f_1(w)| \leq p(w) \quad . \ \square.$$

10.2. Lause (Hahn–Banach) Ol. X $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus, $M \subset X$ v.a.a., p puolinormi avaruudessa X ja $f : M \to \mathbb{R}$ lineaarinen s.e. $|f(u)| \leq p(u)$ $\forall\, u \in M$. Tällöin löytyy lin. $g : X \to \mathbb{R}$ s.e. $g(u) = f(u)$ $\forall\, u \in M$ ja $|g(x)| \leq p(x)$ $\forall\, x \in X$.

Tod. Ol. $N_1 \subset N_2$ X:n v.a.a.:a. $h_1 \in N_1^*$, $h_2 \in N_2^*$

Merk.

$$h_1 \prec h_2 \quad \Leftrightarrow \quad h_1(x) = h_2(x) \quad \forall \quad x \in N_1$$

Kun $N \supset M$ on X:n v.a.a. asetetaan

$$\mathcal{F}_N = \{ h \in L(N, \mathbb{R}) \mid f \prec h \text{ ja } |h(x)| \leq p(x) \ \forall x \in N \}$$

ja

$$\mathcal{F} = \bigcup \{ \mathcal{F}_N \mid N \supset M \ X\text{:n v.a.a.} \}.$$

Nyt $f \in \mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}$, joten $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ja $(\mathcal{F}, \prec)$ (osittain) järjestetty joukko ($f \prec f$, $f \prec g \prec f \Rightarrow f = g$, $f \prec g \prec h \Rightarrow f \prec h$)

(10.3.)

Olk. $\mathcal{G} = \{h_i \in \mathcal{F}_{N_i} \mid i \in J\}$ jokin joukon $\mathcal{F}$ täysin järjestetty osajoukko l. $\forall\, h, g \in \mathcal{G}$ joko $h \prec g$ tai $g \prec h$.

$$N = \bigcup_{i \in J} N_i \quad \text{on } \mathbb{X}\text{:n v.a.a.}$$

(järjestys täysi!)

Aset $k \in L(N, \mathbb{R})$ s.e. $k(x) = h_i(x) \quad \forall\, x \in N_i$

k hyvin määritelty: jos $x \in N_i \cap N_j$ niin $h_i(x) = h_j(x)$, selvästi k lin.

$\Rightarrow$ $k \in \mathcal{F}$ ja $h_i \prec k \quad \forall\, i \in J$

$\therefore$ k on joukon $\mathcal{G}$ yläraja.

Zornin lemma $\Rightarrow$ Joukossa $\mathcal{F}$ on ainakin yksi maksimaalinen alkio $g : W \to \mathbb{R}$.

Jos $W \neq \mathbb{X}$, niin $\exists\, z \in \mathbb{X} \setminus W$. L. 10.1 $\Rightarrow$
$\exists$ lin. $g_1 : W \oplus \operatorname{span}\{z\} =: W_1 \to \mathbb{R}$ s.e. $g_1(x) = g(x)$ $\forall\, x \in W$ ja $|g(x)| \le p(x) \quad \forall\, x \in W_1$.
Siis $g_1 \in \mathcal{F}_W$ ja $g \prec g_1$ $\Rightarrow$ $g_1 \in \mathcal{F}$ mutta $g \neq g_1$ joten g ei ole maksimaalinen alkio.

$\Rightarrow$ $W = \mathbb{X}$ ja g on etsitty lin. $\mathbb{X} \to \mathbb{R}$. $\square$

Huom L. 10.2. pätee myös kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (Bohnenblust-Sobczyk-Suhomlinov)

10.3. Lause Ol. $\mathbb{X}$ normiavaruus, $M \subset \mathbb{X}$ v.a.a. $u' \in M'$. Tällöin $\exists\, x' \in \mathbb{X}'$ s.e. $\langle u, x' \rangle = \langle u, u' \rangle \quad \forall\, u \in M$ ja $\|x'\| = \|u'\|$.

Tod: Määrit. puolinormi p $\mathbb{X}$:ssä asettamalla

$$p(x) = \|x\|\,\|u'\| \quad \text{kun } x \in \mathbb{X}.$$

Tällöin $|\langle u, u' \rangle| \le \|u\|\,\|u'\| = p(u)$ kun $u \in M$.

L. 10.2. $\Rightarrow$ $\exists\, x' \in \mathbb{X}^*$ s.e. $\langle u, x' \rangle = \langle u, u' \rangle \quad \forall\, u \in M$
ja $|\langle x, x' \rangle| \le p(x) = \|x\|\,\|u'\| \quad \forall\, x \in \mathbb{X}$.
$\Rightarrow$ x' jatkuva $\Rightarrow$ $x' \in \mathbb{X}'$
ja $\|x'\| \le \|u'\|$

Toisaalta: $\|u'\| = \sup\{|\langle u,u'\rangle| \mid \|u\|\le 1, u\in M\}$
$= \sup\{|\langle u,x'\rangle| \mid \|u\|\le 1, u\in M\}$
$\le \sup\{|\langle x,x'\rangle| \mid \|x\|\le 1, x\in \mathfrak{X}\} = \|x'\|$

$\therefore \|x'\| = \|u'\|$. $\square$.

10.4. Lause Ol. $\mathfrak{X}$ normiavaruus ja $M \subsetneq \mathfrak{X}$ v.a.a. $x_0\in\mathfrak{X}$ ja $d = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0$. Tällöin $\exists\, x'\in\mathfrak{X}'$ s.e. $x'(M) = \{0\}$, $\langle x_0, x'\rangle = d$ ja $\|x'\| = 1$.

Tod: Olk. $W := M \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$. $\forall z\in W$ $z = u + \lambda x_0$, u, λ 1-käs. Aset. $\langle z, z'\rangle := \lambda d$. $z' : W \to \mathbb{K}$ lin.
Jos $\lambda = 0$ niin $\langle z, z'\rangle = 0$ ja $z\in M$.
Ol. $\lambda\ne 0$: Pätee:

$$|\langle z,z'\rangle| = |\lambda d| \le |\lambda|\,\|\tfrac{u}{\lambda} + x_0\| = \|u+\lambda x_0\| = \|z\|$$

$\forall x\in M$:

$$d \le \|x_0 - x\| \le \|x_0 + \tfrac{u}{\lambda}\| + \|x + \tfrac{u}{\lambda}\| \overset{\text{erit. kun } x = -\frac{u}{\lambda}\in M}{=} \|x_0 + \tfrac{u}{\lambda}\|$$

$\Rightarrow \|z'\| \le 1$.

Os. $\|z'\| = 1$: Ol $\varepsilon > 0$. $d = \inf\{\|x_0 - x\| \mid x\in M\}$
$\Rightarrow \exists\, u\in M$ s.e. $\|x_0 - u\| < d + \varepsilon$
Pätee $|\langle x_0 - u, z'\rangle| = |\langle x_0, z'\rangle| = d$ $\Rightarrow$

$$\|z'\| = \sup\{|\langle z,z'\rangle| \mid z\in W, \|z\|\le 1\} \underset{\left\|\frac{x_0-u}{\|x_0-u\|}\right\| = 1}{\ge} \frac{|\langle x_0-u, z'\rangle|}{\|x_0-u\|}$$

$$= \frac{d}{\|x_0-u\|} > \frac{d}{d+\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{d+\varepsilon} \Rightarrow \|z'\| \ge 1.$$

L.10.3 $\Rightarrow$ $\exists\, x'\in\mathfrak{X}'$ s.e. $\langle x,x'\rangle = \langle x, z'\rangle$ $\forall x\in W$
ja $\|x'\| = \|z'\|$ $\Rightarrow$ $x'(M) = z'(M) = \{0\}$
$\langle x_0, x'\rangle = \langle x_0, z'\rangle = d$ ja $\|x'\| = \|z'\| = 1$. $\square$.

10.5. Seuraus Ol. $\mathfrak{X}$ normiavaruus, $\bar{0}\ne x_0\in\mathfrak{X}$. Tällöin $\exists\, x'\in\mathfrak{X}'$ s.e. $\langle x_0, x'\rangle = \|x_0\|$ ja $\|x'\| = 1$

Tod: Ol $M = \{\bar{0}\}$ jolloin $\operatorname{dist}(x_0, M) = \|x_0\|$. L.10.4 $\Rightarrow$ $\square$.

10.6. Seuraus Ol. $\mathfrak{X}$ normiavaruus ja $x\in\mathfrak{X}$.
Tällöin $\|x\| = \sup\{|\langle x,x'\rangle| \mid x'\in\mathfrak{X}', \|x'\|\le 1\}$

10.5.

<u>Tod:</u> Jos $\|x'\| \leq 1$ niin
$|\langle x, x'\rangle| \leq \|x\| \|x'\| \leq \|x\|$ $\Rightarrow$
$\sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x, x'\rangle| \leq \|x\|$

Jos $x = \bar{0}$ niin $\|x\| = 0 = \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x, x'\rangle|$ $\Rightarrow$ voi ol. $x \neq \bar{0}$.

$10.5 \Rightarrow \exists\ x' \in X'$ s.e. $|\langle x, x'\rangle| = \|x\|$ ja $\|x'\| = 1$
$\Rightarrow \|x\| \leq \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x, x'\rangle|$

10.7 <u>Seuraus</u>

Jos X normiavaruus ja $x \in X$ s.e. $\langle x, x'\rangle = 0 \ \forall\ x' \in X'$ niin $x = \bar{0}$.

<u>Tod:</u> $\langle x, x'\rangle = 0 \ \forall\ x' \in X' \overset{10.6.}{\Longrightarrow} \|x\| = 0 \Rightarrow x = \bar{0}$.

<u>Esim.</u> Kuvaus $\tilde{A}: \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ $\tilde{A}(x)(c) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n c_n$
$x = (x_n) \in \ell^1$, $c = (c_n) \in \ell^\infty$ ei ole surjektio:
Olk. $C = \{ (t_n) \mid t_n \in K \ \exists \lim_{n\to\infty} t_n \} \subset \ell^\infty$

funktionaali $\lim: C \to K$ voidaan jatkaa jatkuvasti lin. kuvaukseksi $x': \ell^\infty \to K$ (Hahn-Banach).

Jos $x' \in (\ell^\infty)'$ olisi esitys $x'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ niin pätee:
$c_k = x'(e_k) = \lim(e_k) = 0 \quad \forall k \Rightarrow x' = 0$ ↯. □

$\therefore \ \ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)'$ (!)

11. Hilbertin avaruuden lineaariset operaattorit

(11.1.)

11.1. Lause Ol. H_1, H_2 kompleksikertoimisia Hilbertin avaruuksia ja $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.
$\exists_1$ $A^* : \mathcal{L}(H_2, H_1)$ s.e. pätee
$$(Ax|y) = (x|A^*y) \quad \forall\, x \in H_1,\ y \in H_2.$$

Tod: Olk. $y \in H_2$. Aset. $f: H_1 \to \mathbb{C}$ $f(x) := (Ax|y)$
f lin. Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$|f(x)| = |(Ax, y)| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|$$

$\therefore$ f rajoitettu
Fréchet – Riesz (9.3) $\Rightarrow$ $\exists_1$ $z \in H_1$ s.e. $f(x) = (x, z)$
$\forall\, x \in H$. Määritellään $A^* : H_2 \to H_1$ asettamalla
$A^*(y) = z$. Tällöin pätee $(Ax|y) = f(x) = (x|A^*x)$
$\forall\, x \in H_2, y \in H_2$.

Täytyy os: $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$

A^* lin.: Olk. $y_1, y_2 \in H_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $x \in H_1$
$\Rightarrow$
$$(x|A^*(\lambda y_1 + \mu y_2)) = (Ax|\lambda y_1 + \mu y_2)$$
$$= \bar\lambda (Ax|y_1) + \bar\mu (Ax|y_2) = \bar\lambda (x|A^*y_1) + \bar\mu (x|A^*y_2)$$
$$= (x|\lambda A^*y_1 + \mu A^*y_2) \Rightarrow$$
$$A^*(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda A^* y_1 + \mu A^* y_2$$

A^* raj: Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$\|A^*y\|^2 = (A^*y|A^*y) = (AA^*y|y) \leq \|AA^*y\| \|y\|$$
$$\leq \|A\| \|A^*y\| \|y\|$$
Jos $\|A^*y\| > 0$ $\Rightarrow$ $\|A^*y\| \leq \|A\| \|y\|$
Jos $\|A^*y\| = 0 \leq \|A\| \|y\|$.

$\therefore$ $\|A^*\| \leq \|A\|$

A^* 1-käs: Ol $\tilde{A} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ s.e.

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, \tilde{A}y\rangle \qquad \forall\, x \in H_1,\ y \in H_2$$

$\Rightarrow$ $A^*y = \tilde{A}y$ $\forall\, y \in H_2$ $\Rightarrow$ $A^* = \tilde{A}$. $\square$