(8.3)

Tod: U pisteen $\bar{0}$ ystö $\Rightarrow \exists r>0$ s.e. $B := B(\bar{0}, r)$ ja $B + B \subset U$.

A surj. $\Rightarrow \forall y \in Y \ \exists x \in X$ s.e. $Ax = y$.

Val. $n \in \mathbb{N}$ s.e. $\|x\| < nr$ eli $x \in nB = B(\bar{0}, nr)$

$\Rightarrow y \in A(nB) = nA(B) \subset n(\overline{A(B)})$ $\therefore Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n(\overline{A(B)})$

Huom. $n\overline{A(B)} = \overline{nA(B)}$, sillä $x \mapsto nx$ homeo.

Y Banach $\overset{L7.2}{\Rightarrow} \exists$ avaruuden Y kuula $B_Y(x_0, s_0) \subset n\overline{A(B)}$ jollakin n. $\Rightarrow$

$$B_Y\left(\frac{x_0}{n}, \frac{s_0}{n}\right) = \frac{1}{n} B_Y(x_0, s_0) \subset \overline{A(B)}$$

Merk $\tilde{x} = \frac{1}{n} x_0$, $\varsigma = \frac{1}{n} s_0$ jolloin $B_Y(\tilde{x}, \varsigma) \subset \overline{A(B)}$.

Lisäksi $-\tilde{x} \in \overline{A(B)}$: jos $\tilde{x} \in \overline{A(B)}$ $\exists$ jono $(y_n) \subset A(B)$ s.e. $\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} y_n$. Nyt $y_n \in A(B) = A(B(\bar{0}, r)) \Rightarrow -y_n \in A(B)$

$\Rightarrow -\tilde{x} = \lim(-y_n) \in \overline{A(B)}$.

Saadaan: $B_Y(\bar{0}, \varsigma) = -\tilde{x} + B_Y(x, \varsigma) \subset \overline{A(B)} + \overline{A(B)} \subset \overline{A(B) + A(B)}$

$= \overline{A(B+B)} \subset \overline{A(U)}$.

$\therefore \overline{A(U)}$ pisteen $\bar{0}$ ystö Y:ssä. $\square$.

Tod: (L.8.5) Os. A avoin pisteessä $\bar{0}$. Riittää os. L.8.7. todistuksessa $A(U)$ pisteen $\bar{0}$ ystö Y:ssä.

Ol. $r > 0$, $r_0 = \frac{1}{2} r$ ja $r_k = 2^{-k} r_0$ kun $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k$, $r_k > 0$

L.8.7 $\Rightarrow \exists s_k > 0$ s.e. $B_Y(\bar{0}, s_k) \subset \overline{A(B_X(\bar{0}, r_k))}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Jos $y \in A(B_X(\bar{0}, r_k))$ niin $\|y\| \leq \|A\| r_k \to 0$ kun $k \to \infty$

$\Rightarrow s_k \to 0$ kun $k \to \infty$.

V: $B_Y(\bar{0}, s_0) \subset A(B_X(\bar{0}, r))$

T: Ol. $y \in Y$, $\|y\| < s_0 \Rightarrow y \in \overline{A(B_X(\bar{0}, r_0))}$

$\Rightarrow \exists x_0 \in B_X(\bar{0}, r_0)$ s.e. $\|y - Ax_0\| < s_1$

$\Rightarrow y - Ax_0 \in B_Y(\bar{0}, s_1) \subset \overline{A(B_X(\bar{0}, r_1))}$. Vast. jatkamalla

$\Rightarrow \exists x_1 \in B_X(\bar{0}, r_1)$ s.e. $\|(y - Ax_0) - Ax_1\| < s_2$

$\Rightarrow y - Ax_0 - Ax_1 \in B_Y(\bar{0}, s_2) \subset \overline{A(B_X(\bar{0}, r_2))}$

Induktiivisesti: jos $x_k \in B_X(\bar{0}, r_k)$, $0 \leq k \leq n-1$ ja

$y - \sum_{k=0}^{n-1} Ax_k \in B_Y(\bar{0}, s_n) \subset \overline{A(B_X(\bar{0}, r_n))}$ niin $\exists x_n \in B_X(0, r_n)$

s.e. $\|y - \sum_{k=0}^{n} Ax_k\| < s_{n+1}$

$\therefore$ saadaan jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ s.e. $\|x_n\| < r_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

ja $\sum_{k=0}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} r_k = 2r_0 = r < \infty$.

$\therefore$ $\sum x_k$ normisuppeneva täydellisessä X $\Rightarrow$ $\sum x_k$ supp.

Merk. $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Nyt pätee

$$\|x\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 2r_0 = r \quad \text{eli } x \in B_X(\bar{0}, r)$$

Lisäksi $\|y - A(\sum_{k=0}^{n} x_k)\| = \|y - \sum_{k=0}^{n} Ax_k\| < s_{n+1} \to 0$ kun $n \to \infty$

niin

$$y = \lim_{n\to\infty} A(\sum_{k=0}^{n} x_k) \overset{A \text{ jva}}{=} A(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k) = Ax.$$

Saatiin: Jos $y \in Y$ ja $\|y\| < s_0$, niin $y = Ax$, missä $x \in X$ ja $\|x\| < r$.

eli $B_Y(\bar{0}, s_0) \subset A(B_X(\bar{0}, r))$, $r > 0$ mv. $\square$

Yhteenvetona:

8.8. Lause Jos X, Y Banachin avaruuksia, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektio niin $\exists\ C < \infty$ s.e. $\forall\ y \in Y\ \exists\ x \in X$, jolle $Ax = y$ ja $\|x\| \le C\|y\|$.

Tod: $8.7 \Rightarrow \exists\ C < \infty$ s.e. $\overline{B_Y(0, \frac{1}{C})} \subset A(B_X(\bar{0}, 1))$

Jos $y \in Y$ niin

$$\hat{y} := \frac{y}{C\|y\|} \in \overline{B_Y(\bar{0}, \tfrac{1}{C})} \quad \text{ja} \quad \hat{y} = A\hat{x} \text{ jollakin } \hat{x}: \|\hat{x}\| < 1$$

$$\Rightarrow y = A(C\|y\|\hat{x}) =: Ax \quad \text{ja} \quad \|x\| = \|C\|y\|\hat{x}\| \le C\|y\|. \square$$

8.9. Seuraus Jos X, Y Banachin avaruuksia, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ injektio, niin $A(X)$ on Y:n suljettu v.a.a.

$\Leftrightarrow \exists\ \beta > 0$ s.e. $\|Ax\| \ge \beta\|x\|\ \forall\ x \in X$. $(*)$

Huom jos ehto $(*)$ toteutuu, sanotaan: A on alhaalta rajoitettu.

Tod: "$\Rightarrow$" Ol. $A(X) \subset Y$ suljettu $\underset{Y \text{ Banach}}{\overset{3.6}{\Rightarrow}}$ $A(X)$ Banach

$A: X \to A(X)$ surj $\overset{8.8}{\Rightarrow}$ $\|Ax\| \ge \frac{1}{C}\|x\|$ jollakin $\beta = \frac{1}{C}$.

"$\Leftarrow$" Ol. $(*)$. Lisäksi A jatkuva $\Rightarrow \exists\ \alpha, \beta > 0$ s.e.

$$\left.\begin{array}{l} \beta\|x\| \le \|Ax\| \le \alpha\|x\| \\ A: X \to A(X) \text{ lin. bijektio} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A: X \to A(X) \text{ homeo} \\ \Rightarrow A(X) \text{ täydellinen} \\ \overset{3.7}{\Rightarrow} A(X) \text{ suljettu}. \square \end{array}$$

Huom. Yleensä jatkuva lin. injektio $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ ei ole alhaalta rajoitettu ($A^{-1}: A(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ ei tarvitse olla jatkuva!)
esim. $A: \ell^2 \to \ell^2$ $\quad A(x_k) = (\frac{1}{k} x_k)$ $\quad (x_k) \in \ell^2$ jva
lin. inj. Mutta $\|A(0,\dots,1,0,\dots)\|_2 = \frac{1}{k} \to 0$ kun $k \to \infty$.

8.10. Määritelmä Kuvauksen $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ kuvaaja l. graafi on joukko

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \mid x \in \mathbb{X}\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

Ol. $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ normiavaruuksia. Varustetaan tuloavaruus $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ normilla
$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.
Tällöin $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus (HT)

8.11. Lause Ol. $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ normiavaruuksia, $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ jatkuva.
Tällöin f:n kuvaaja $G(f) \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ on suljettu joukko.
Tod: Ol. $(x,y) \in \overline{G(f)} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. $\exists$ jono $(x_n, y_n) \subset G(f)$
s.e. $(x_n, y_n) \to (x,y)$ kun $n \to \infty$. Tässä $y_n = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Pätee: $\|x_n - x\| \le \|(x_n, y_n) - (x,y)\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \to 0$, kun $n \to \infty$
$\Rightarrow x_n \to x$ kun $n \to \infty$ $\mathbb{X}$:ssä. f jatkuva $\Rightarrow$
$f(x_n) \to f(x)$ kun $n \to \infty$ $\mathbb{Y}$:ssä.
Vastaavasti $f(x_n) = y_n \to y$ $\Rightarrow$ raja-arvo 1-käs: $y = f(x)$.
$\therefore (x,y) = (x, f(x)) \in G(f)$. $\square$

Huom. Jos $A: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ lin. niin $G(A)$ on avaruuden $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ v.a.a. Saadaan: Jos $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ Banach-avaruuksia, A jva. niin $G(A)$ Banach-avaruuden $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ suljettuna aliavaruutena Banach (L.3.6.)

Os. että käänteinen pätee lin. kuvaukselle $A: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$:

8.12. Suljetun kuvaajan lause. Ol $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ Banach-avaruuksia
$A: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ lin. s.e. $G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathbb{X}\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ on suljettu. Tällöin $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
Tod: L.3.6. $\Rightarrow$ $G(A)$ Banach-avaruus. Aset. kuvaus
$\psi: G(A) \to \mathbb{X}$:
$$\psi(x, Ax) = x \quad \text{kun } (x, Ax) \in G(A).$$

A lin. $\Rightarrow \Psi$ lin.

Ψ bijektio: surj. selvä, inj.: $x = \Psi(x, Ax) = \bar{0}$

$\Rightarrow (x, Ax) = (\bar{0}, A\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$.

Ψ rajoitettu:

$\|\Psi(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\| \quad \forall (x, Ax) \in G(A)$.

$\therefore \Psi$ jva lin. bijektio $G(A) \to \underline{X}$.

L. 8.6 $\Rightarrow \Psi$ homeomorfismi $\Rightarrow \exists\, \beta > 0$ s.e.

$\beta \|(x, Ax)\| \leq \|\Psi(x, Ax)\| = \|x\| \quad \forall (x, Ax) \in G(A)$.

Saadaan:

$\beta \|Ax\| \leq \beta(\|x\| + \|Ax\|) = \beta \|(x, Ax)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \underline{X}$.

$\therefore \|Ax\| \leq \frac{1}{\beta} \|x\|$ eli A on jatkuva. □.

Huom L. 8.12. tarvitaan oletus A lineaarinen.

$\exists$ epäjatkuva $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. $G(f) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suljettu. (HT)

Huom. L. 8.12 antaa laskennallisen testin jatkuvuudelle

Ehto $\overline{G(A)} = G(A) \Leftrightarrow (\forall x \in \underline{X}: x_n \to x,\ Ax_n \to y$

$\Rightarrow y = Ax)$.

Avoimen kuvauksen lauseesta saadaan:

8.13. Seuraus (Banachin isomorfialause)

Jos $\underline{X}$ on Banach-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(\underline{X})$ bijektio.

Tällöin A on "kääntyvä".

Tod: Val. $\underline{Y} = \underline{X}$ L. 8.6.

8.14. Lause Ol. $\underline{X}$ normiavaruus ja $A \in \mathcal{L}(\underline{X})$ kääntyvä

tällöin $\forall x \in \underline{X}$ pätee

$\|Ax\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|x\|$

Tod: $\forall x \in \underline{X}$ pätee $\|x\| = \|A^{-1}(A(x))\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\|$

$\Rightarrow \|Ax\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|x\|$

8.15. Lause Ol. $\underline{X}$ Banach-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(\underline{X})$

jolle $\exists\, \alpha > 0$ s.e. $\|Ax\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in \underline{X}$.

Tällöin $\operatorname{Im} A$ on suljettu joukko.

Tod: Ol. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Im}(A)$ s.e. $y_n \to y$ kun $n \to \infty$.

Os. $y \in \operatorname{Im}(A)$:

$y_n \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists\, x_n \in \underline{X}$ s.e. $Ax_n = y_n$ (y_n) supp.

$\Rightarrow (y_n)$ Cauchy ja

$\|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \overset{\alpha}{\geq} \alpha \|x_n - x_m\|$

$\forall\, m,n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ (x_n) Cauchy

$\underline{X}$ Banach $x_n \to x \in \underline{X}$ kun $n \to \infty$

A jatkuva $\Rightarrow$ $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. □.

Saadaan kääntyvien operaattoreiden karakterisointi:

8.16. Lause Ol. $\underline{X}$ Banach-avaruus, $A \in \mathcal{L}(\underline{X})$.
Tällöin A kääntyvä $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}(A)$ $\underline{X}$:n tiheä osajoukko ja $\exists\, \alpha > 0$ s.e. $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ $\forall\, x \in \underline{X}$.

Tod: "$\Rightarrow$" $\operatorname{Im}(A) = \underline{X}$, 8.14.

"$\Leftarrow$" $\operatorname{Im}(A)$ tiheä & suljettu (8.15) eli $\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)} = \underline{X}$.

A inj: Ol. $x \in \ker(A)$ l. $Ax = 0$ $\Rightarrow$

$0 = \|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ $\Rightarrow$ $x = 0$.

$\Rightarrow$ A kääntyvä (8.13).

8.17. Seuraus Ol. $\underline{X}$ Banach-avaruus, $A \in \mathcal{L}(\underline{X})$
Tällöin A ei kääntyvä $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} A$ ei tiheä $\underline{X}$:ssä tai $\exists$ jono $(x_n) \in \underline{X}$, $\|x_n\| = 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ mutta

$\lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$.

Esim 1° Ol. $h \in C[0,1]$, $A_h \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ s.e.

$(A_h g)(t) = h(t) g(t)$.

Jos $f \in C[0,1]$ on funktio $f(t) = t$ niin A_f ei kääntyvä.

Tod: $A_h \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ (HT)

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ aset $g_n = \sqrt{n}\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$. Tällöin $g_n \in L^2[0,1]$ ja

$$\|g_n\|^2 = \int_0^1 \sqrt{n}\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)\, \sqrt{n}\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)\, dt = \frac{n}{n} = 1$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$

kuitenkin

$$\|A_n g_n\|^2 = \int_0^1 t\sqrt{n}\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)\, t\sqrt{n}\, \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)\, dt$$

$$= n \int_0^{1/n} t^2\, dt = \frac{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3n^2} \to 0 \text{ kun } n \to \infty$$

. □.

2° Ol h, A_h kuten edellä, mutta $f \in C[0,1]$ s.e. $f(t) = 1+t$. Tällöin A_f kääntyvä:

a) eksplisiittinen lasku:

Olk. $k(t) = \dfrac{1}{1+t}$. $k \in C[0,1]$ ja

$$(A_k A_f g)(t) = (A_k(fg))(t) = k(t)f(t)g(t) = g(t)$$

$\forall\, t \in [0,1]$ joten $(A_k A_f)g = g \quad \forall\, g \in L^2[0,1]$

$\therefore$ $A_k A_f = I$. Samoin $A_f A_k = I$

Siis A_f kääntyvä ja $A_f^{-1} = A_k$.

b) käytetään L. 8.16.

Ol. $k \in C[0,1]$ ja $g = \dfrac{k}{f} \in C[0,1]$ ja pätee:

$A_f(g) = f(t)g(t) = k(t) \quad \forall\; t \in [0,1] \quad \therefore Im(A_f) = C[0,1]$

Lisäksi

$$\|A_f(g)\|^2 = \int_0^1 f(t)g(t)\overline{f(t)}\,\overline{g(t)}\,dt = \int_0^1 |f(t)|^2 |g(t)|^2$$

$$\geq \int_0^1 |g(t)|^2 dt = \|g\|^2$$

L. 8.16 $\Rightarrow$ A_f kääntyvä.

Huom Aina ei eksplisiittisen käänteisfunktion etsiminen ole yhtä helppoa kuin esim 2° a) kohdassa.

Nähdään pian: Tilanne on kääntyvyyden testaamiseen yksinkertainen eli kun tarkastellaan avaruutta $\mathcal{L}(H)$ missä H Hilbertin avaruus.