Tarkastellaan minimointiongelmaa Hilbertin avaruudessa.

Esim. Ol. $e_n = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n.}}{1}, 0, \dots 0) \in \ell^2$

$$M = \left\{ \frac{n+2}{n+1} e_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$ suljettu ja rajoitettu, mutta

$\nexists$ vektoria $x \in M$ s.e. $\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in M\} = 1$.

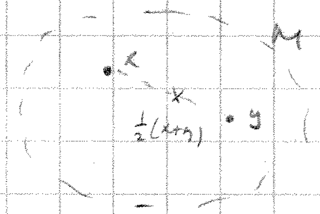
Kompaktius riittää, mutta hyvin rajoittava lisäehto. Käytetään konveksisuutta (2.8.)

5.9. Lause Ol. H Hilbertin avaruus, $M \subset H$, $M \neq \emptyset$, suljettu ja konveksi. Tällöin löytyy 1-käsitteinen $x_0 \in M$ s.e. pätee $\|x_0\| \leq \|x\|$ $\forall x \in M$.

Tod: Merk $\delta = \inf\{\|x\| \mid x \in M\}$

L. 5.4. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ vektoreihin $\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y$ kun $x, y \in M$. $\Rightarrow$

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2$$



konveksius $\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) \in M \Rightarrow$

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\underbrace{\left\|\frac{x+y}{2}\right\|}_{\geq \delta}{}^2$$

(*)
$$\leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2$$

Jos $\|x\| = \|y\| = \delta$, niin $\|x-y\|^2 \leq 0 \Rightarrow x = y$

$\therefore$ minimoiva alkio on 1-käs.

Olemassaolo: Olk $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ jono s.e. $\|x_n\| \to \delta$ kun $n \to \infty$ $\quad (*) \Rightarrow$

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - 4\delta^2 \to 0 \quad \text{kun } n, m \to \infty$$

Siis (x_n) cauchy-jono H:ssa $\overset{H \text{ Hilbert}}{\Rightarrow} x_n \to x_0 \in H$

$\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ jatkuva $\Rightarrow \|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta$

M suljettu, $(x_n) \subset M \Rightarrow x_0 \in M$. $\square$

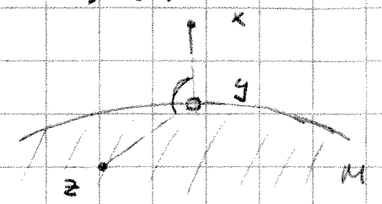
Ekvivalenttisti:

5.10. Seuraus Ol. H Hilbertin avaruus, $M \subset H$, $M \neq \emptyset$ suljettu ja konveksi, $x \in X$. Tällöin $\exists$ 1-käs $y_0 \in M$ s.e. $\|x - y_0\| = \operatorname{dist}(x, M)$ $= \inf\{\|x-y\| \mid y \in M\}$.

Tod: Joukko $x - M = \{x - y \mid y \in M\}$ suljettu, konveksi

5.9. $\Rightarrow \exists_1$ $x_0 \in M$ s.e. $\|x - x_0\| \leq \|x - y\|$ $\forall y \in M$. $\square$

Minimoiva alkio voidaan tunnistaa: Jos H $\mathbb{R}$-kertoiminen Hilbertin avaruus, niin $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x,M) \iff \sphericalangle(x-y,\, x-z)$ on tylppä $\forall\, z \in M$.



$$(a|b) = \|a\|\|b\| \cos \sphericalangle(a,b)$$

Tämä on seurausta lauseesta:

5.11. <u>Lause</u> Ol. H Hilbertin avaruus, $M \subset H$ epätyhjä suljettu konveksi, $x \in H$ ja $y \in M$. Pätee

$$\|x-y\| = \mathrm{dist}(x,M) \iff \forall\, z \in M \text{ pätee } \mathrm{Re}\,(x-y\,|\,z-y) \le 0.$$

<u>Tod</u>:

"$\Rightarrow$" Ol. $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x,M)$. Jos $z \in M$ ja $0 < \lambda < 1$ niin konveksius $\Rightarrow$ $y + \lambda(z-y) \in M$. Saadaan siis

$$\|x-y-\lambda(z-y)\|^2 \ge \|x-y\|^2 \iff$$

$$\|x-y\|^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}\,(x-y,\, z-y) + \lambda^2 \|z-y\|^2 \ge \|x-y\|^2 \iff$$

$$\mathrm{Re}\,(x-y,\, z-y) \le \frac{\lambda}{2}\|z-y\|^2$$

Kun $\lambda \to 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,(x-y,\, z-y) \le 0$

"$\Leftarrow$" Ol. $\mathrm{Re}\,(x-y\,|\,z-y) \le 0 \;\; \forall\, z \in M \Rightarrow$

$$\|x-z\|^2 = \|x-y-(z-y)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x-y\,|\,z-y) + \|z-y\|^2$$

$$\ge \|x-y\|^2 \quad \forall\, z \in M$$

$\therefore$ y minimoiva alkio ja $\|x-y\| = d(x,M)$. $\square$.

Tarkastellaan jatkossa tilannetta, jossa M on lisäksi vektorialiavaruus.

5.12. <u>Lause</u> Ol. H Hilbertin avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Kun $x \in H$ ja $y \in M$ niin pätee

$$\|x-y\| = \mathrm{dist}(x,M) \iff x-y \perp M$$

<u>Tod</u>: "$\Rightarrow$" Jos $z \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin $y + \lambda z \in M$ (v.a.a.)

5.11. $\Rightarrow$ $0 \ge \mathrm{Re}\,(x-y\,|\,(y+\lambda z)-y) = \mathrm{Re}\,(\bar{\lambda}(x-y\,|\,z)) \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$

valitsemalla $\lambda = (x-y\,|\,z)$ saadaan $|(x-y\,|\,z)| \le 0$

$\Rightarrow (x-y\,|\,z) = 0 \;\; \forall\, z \in M \Rightarrow x-y \in M^{\perp}$

"$\Leftarrow$" Ol $x-y \perp M$. Jos $z \in M$ niin $z-y \in M \Rightarrow$

$0 = (x-y\,|\,z-y) \Rightarrow \mathrm{Re}\,(x-y\,|\,z-y) = 0 \;\; \forall\, z \in M$

L.5.11 $\Rightarrow$ $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x,M)$. $\square$.

Ol H Hilbertin avaruus $M \subset H$ suljettu vektorialiavaruus

Aset. $P_M : H \to H$ kuvaus, joka liittää pisteeseen $x \in H$ L. 5.10 antaman 1-käs vektorin $y \in H$ s.e. $\|x - y\| = d(x, M)$.

Kuvaus $P_M : P_M(x) = y$ on <u>avaruuden H</u> <u>ortoprojektio</u> aliavaruudelle M ja y on <u>vektorin x</u> <u>ortoprojektio</u> avaruudelle M.

<u>Huom</u> L. 5.12 $\Rightarrow$ $y = P_M x \iff y \in M$ ja $x - y \perp M$.

(*) $\therefore$ Ortoprojektion määräävät ehdot: $P_M x \in M$, $x - P_M x \perp M$ $\forall x \in H$.

Erityisesti pätee: $P_M x = \bar{0}$ kun $x \in M^\perp$ (Tällöin $P_M x = (P_M x - x) + x \in M^\perp$ eli $P_M x \in M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$)

Lisäksi $P_M x = x$ $\forall x \in M$ $(0 = d(x, M) = \|x - x\|)$

Saatiin: lin operaattori! (Huom. metrinen suure)

5.13. <u>Lause</u> Ol H Hilbertin avaruus, $M \subset H$ suljettu v.a.a. Tällöin $P_M : H \to H$ lin.

<u>Tod</u>: $x + \lambda y = \underbrace{P_M x + \lambda P_M y}_{=: z \in M} + \underbrace{x - P_M x + \lambda(y - P_M y)}_{\in M^\perp}$

$\forall x, y \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Saatiin $x + \lambda y - z \in M^\perp$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} P_M(x + \lambda y) = z = P_M x + \lambda P_M y \Rightarrow P_M$ lin. $\square$.

<u>Muistutus</u>: Lin. kuvaus $P : \bar{X} \to \bar{X}$ on projektio jos $P^2 = P$. Jos $U = P(\bar{X})$, $V = \ker P$, niin P on projektio avaruudelle U avaruuden V suuntaan. Tällöin $\bar{X} = U \oplus V$. Toisaalta jokainen suora summa määrittelee projektion. (HT)

5.14. <u>Lause</u> Ol. H Hilbertin avaruus, $M \subset H$ suljettu v.a.a. Tällöin $H = M \oplus M^\perp$ ja P_M on avaruuden H projektio M:lle avaruuden $M^\perp$ suuntaan.
Lisäksi pätee $\|P_M x\| \leq \|x\|$ $\forall x \in H$.

Tod: $M, M^\perp$ v.a.a. $x = \underbrace{P_M x}_{\in M} + \underbrace{x - P_M x}_{=:z \in M^\perp} \quad \forall x \in H$ (5.8.)

$\Rightarrow H = M + M^\perp \quad \Rightarrow H = M \oplus M^\perp$, sillä $M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$.

$P_M z = \bar{0} \quad \Rightarrow P_M x = P_M(P_M x + z) \overset{\text{lin.}}{=} P_M^2 x + P_M z = P_M^2 x$

$\therefore P_M$ projektio ja $P_M(H) = M$ (P_M:n määrit.)
sekä $\ker P_M = M^\perp$ $(P_M x = \bar{0} \Rightarrow x = x - P_M x \perp M)$

Pythagoras $\Rightarrow$ $\|x\|^2 = \|P_M x + (x - P_M x)\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2$
$\geq \|P_M x\|^2$. $\square$.

Huom. L. 5.13. $\Rightarrow$ P_M jatkuva ja $\|P_M\| = 1$.

5.8a $\rightarrow$

5.15. Määritelmä Sisätuloavaruuden jono (e_n) on ortonormaali jos pätee $(e_j | e_k) = \delta_{jk} \quad \forall j, k$

Esim 1° ℓ^2 (e_n) orton. $e_n = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots)$
2° $L^2(0, 2\pi)$ $(x|y) = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}\,dt$ Hilbert.
(x_n) orton. kun
$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (HT)$$

5.16 Besselin epäyhtälö Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa H, niin pätee
$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Erityisesti $\lim_{k\to\infty} (x|e_k) = 0$.

Tod: Ol. (e_n) orton. $x \in H$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (x|e_k)e_k - x \,\middle|\, e_j\right) = (x|e_j) - (x|e_j) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$\Rightarrow x - \sum_{k=0}^{n} (x|e_k)e_k \perp e_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$. Pythagoras $\Rightarrow$

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{k=0}^{n}(x|e_k)e_k\|^2 + \|\sum_{k=0}^{n}(x|e_k)e_k\|^2 \geq \|\sum_{k=0}^{n}(x|e_k)e_k\|^2$$
$$\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n} |(x|e_k)|^2. \quad \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \text{ väite.}$$

Aset. $M^{\perp\perp} := (M^{\perp})^{\perp}$.

5.14a Seuraus

Jos M on Hilbertin avaruuden H suljettu vektorialiavaruus niin pätee $M^{\perp\perp} = M$.

Tod: $M \subset M^{\perp\perp}$: Olk. $x \in M$ $(x,y) = \overline{(y,x)} = 0$ $\forall y \in M^{\perp}$ joten $x \in M^{\perp\perp}$ (pätee $\forall M \subset H$!)

$M \supset M^{\perp\perp}$: Olk. $x \in M^{\perp\perp} \overset{L.5.14.}{\Rightarrow} x = y + z$, missä $y \in M$, $z \in M^{\perp}$
Koska $y \in M$ ja $x \in M^{\perp\perp} \Rightarrow (x,z) = 0 = (y,z) \Rightarrow$
$0 = (x,z) = (y+z, z) = (y,z) + (z,z) = \|z\|^2$
$\Rightarrow z = 0$ ja $x = y \in M$ □.

5.14b Seuraus Jos M on Hilbertin avaruuden vektorialiavaruus, niin $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

Tod: Yl. $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_2^{\perp} \subset M_1^{\perp}$: Jos $x \in M_2^{\perp}$ niin $(x/y) = 0$ $\forall y \in M_2$ ja ent. myös $\forall y \in M_1$ ($M_1 \subset M_2$)
$\Rightarrow x \in M_1^{\perp}$.
ent. siis $M \subset \overline{M} \Rightarrow \overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp} \Rightarrow$
$M^{\perp\perp} \subset \overline{M}^{\perp\perp} \overset{5.14a)}{=} \overline{M}$
Toisaalta $M \subset M^{\perp\perp}$, $M^{\perp\perp}$ suljettu (L.5.7)
$\Rightarrow \overline{M} \subset M^{\perp\perp}$. □.

5.17. Määritelmä Ol. H Hilbertin avaruus ja $(e_n) \subset H$ ortonormaali jono, niin luvut $(x|e_k)$ ovat vektorin x Fourier-kertoimet jonon (e_n) suhteen. (5.9.)

5.18. Lause Ol. H Hilbertin avaruus, $(e_j)_{j=0}^{n}$ orton. jono ja $M = sp(\{e_0, \dots, e_n\})$. Tällöin M on suljettu v.a.a. ja $P_M x = \sum_{k=0}^{n} (x|e_k) e_k$, $\forall x \in H$.

Tod: L. 3.20 $\Rightarrow$ M äärellisulotteisena suljettu. Kuten edellä $e_j \perp (x - \sum_{k=0}^{n} (x|e_k) e_k) \iff x - P_M x \in M^\perp$ tämä ja $P_M x \in M$ karakterisoivat kuvauksen P_M. $\square$.

L. 5.12. & 5.18. $\Rightarrow$ $\forall x \in H$ funktio $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \|x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k\|$ saa pienimmän arvonsa täsmälleen kun $\lambda_k = (x|e_k)$.

5.19. Lause Ol. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa H. Jos $\lambda_n \in \mathbb{K}$, niin $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k \text{ suppenee} \iff \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty .$$

Tällöin pätee: $\|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

Tod: Jos $p, q \in \mathbb{N}$ $p < q$ niin Pythagoras $\Rightarrow$

$$\|\sum_{k=0}^{q} \lambda_k e_k - \sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k\|^2 = \|\sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} |\lambda_k|^2$$

$\Rightarrow$ osasummat $s_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$ muodostavat

Cauchy-jonon $\iff$ $\sum |\lambda_k|^2$ supp $\Rightarrow$ 1. väite

Merk. $x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k$ $\Rightarrow$

sisätulo jva

$$(x|e_j) = (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k | e_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (e_k|e_j) = \lambda_j$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = (x|x) = (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k | x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \underbrace{(e_k|x)}_{=\overline{\lambda_k}} = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \quad \square.$$

Huom Saatiin: $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee $\iff$ $(\lambda_k) \in \ell^2$

5.20. Seuraus (Riesz-Fisher) Jos H Hilbert ja $(e_k)_k$ ortonormaali ja $(\lambda_k) \in \ell^2$ niin $\exists x \in H$ s.e. $(x|e_k) = \lambda_k$ $\forall k$.

5.10.

5.21. Seuraus Jos H Hilbertin avaruus (e_n) ortonormaali jono ja $x \in H$ niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n$ suppenee.

Tod: Bessel (5.16) $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$
5.19 $\Rightarrow$ väite. $\square$.

5.22. Määritelmä Hilbertin avaruuden H ortonormaali jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta jos $\overline{span}(\{e_n | n \in \mathbb{N}\}) = H$

Huom Jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta $\Leftrightarrow$ $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on maksimaalinen ortonormaali joukko H:ssa;
Jos $M = \overline{span}(\{e_n | n \in \mathbb{N}\})$, niin $M \neq H \Leftrightarrow M^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$
$\Leftrightarrow \exists\ x \in M^{\perp}$ jolle $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \{x\} \cup \{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ orton.
$\Leftrightarrow (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ei maksimaalinen orton. joukko.

5.23 Lause Olk. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H. Tällöin seuraavat ehdot yhtäpitäviä:

(i) Jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta H:ssa
(ii) $(x|e_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \bar{0}$
(iii) $\forall x \in H$ on esitys $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)e_n$
(iv) $\forall x \in H$ pätee
$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(x|e_n)|^2 \quad \text{(Plancherelin kaava)}$$
(v) $\forall x, y \in H$ pätee
$$(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)\overline{(y|e_n)} \quad \text{(Parsevalin yhtälö)}$$

Huom. (iii): $\|x - \sum_{n=0}^{N} (x|e_n)e_n\| \to 0$ kun $N \to \infty$.

Tod: Ol $card(\{e_n\}) = \infty$. Äärell. ul. tapaus HT
$\forall M \subset H$ pätee $M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$ ("$\supset$" selvä, "$\subset$": $\forall x \in M^{\perp}$:
$(x|y) = 0\ \forall y \in M$ jos $z \in \overline{M}$ val $(y_n) \subset M$ s.e. $y_n \to z$
(1) jatkuva $\Rightarrow (x|z) = \lim_{n \to \infty} (x|y_n) = 0$)
Olk. $M = \overline{sp}(\{e_n\})$: (ii) $\Leftrightarrow$ $M^{\perp} = \{\bar{0}\}$ $\overset{5.14.}{\Leftrightarrow}$ $M = H$ (i)

Selvästi (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii)

Os: (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Jos $x \in H$ merkitään $\hat{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)e_n$
Bessel & 5.19. $\Rightarrow$ sarja suppenee ja $\hat{x} \in H$
$\forall k \in \mathbb{N}$: $(\hat{x}|e_k) = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{N} (x|e_n)e_n \,|\, e_k \right) = (x|e_k)$
$\Rightarrow (\hat{x} - x|e_k) = 0\ \forall k \in \mathbb{N} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \hat{x} = x$.

Os. (iii) $\Rightarrow$ (v): $\forall x \in H$: $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)e_n$

$$\Rightarrow (x|y) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} (x|e_n)e_n \,/\, y \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (x,e_n)(e_n/y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x,e_n)\overline{(y|e_n)} \quad . \square.$$

Jos Hilbertin avaruudella H on Hilbertin kanta niin se on separoituva. Tämä on myös riittävä ehto

5.24. <u>Lause</u> Jos H on separoituva Hilbertin avaruus, niin sillä on Hilbertin kanta.

<u>Tod</u>: Jos $\dim H < \infty$ niin Gram-Schmidt $\Rightarrow$ Hilbertin kanta.

Ol. $\dim H = \infty$. $H = \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ koska separoituva

Poistetaan jonosta (x_n), sellaiset alkiot x_k, jotka ovat lin. riippuvia edellisistä vektoreista $x_1, \dots, x_{k-1}$

Saadaan lin. riippumaton osajono $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.e.

$$\operatorname{span}\{y_1, y_2, \dots\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots\}$$

Sovelletaan Gram-Schmidt ortonormeerausta jonoon (y_n):

$$z_1 = y_1, \quad e_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|}$$

$$z_2 = y_2 - (y_2|e_1)e_1, \quad e_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|}$$

...

$$z_k = y_k - \sum_{j=1}^{k-1} (y_k|e_j)e_j, \quad e_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}$$

...

Huom. $(z_k/e_l) = 0 \quad \forall\, l = 1, \dots, k-1 \Rightarrow$

$(e_k/e_l) = 0 \quad \forall\, l = 1, \dots, k-1$.

$\therefore \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormaali jono

selvästi:

$$\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \operatorname{span}\{z_1, \dots, z_k\} = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_k\}$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots\} = \operatorname{span}\{y_1, y_2, \dots\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots\}$$

$$\Rightarrow \overline{\operatorname{span}\{e_1, e_2 \dots\}} = \overline{\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots\}} = H. \square.$$

Ol $(e_j)_{j\in I}$ separoituvan Hilbertin avaruuden kanta, missä $I = \mathbb{N}$ tai $I = \{1, \dots, N\}$. Tällöin $\forall\, x \in H$ on esitys $x = \sum_{k\in I} (x|e_k) e_k$ (5.12)

Jos $(\lambda_k) \in \ell^2$ tai $(\lambda_k) \in \mathbb{K}^N$ määritellään lin. kuvaus $A: \ell^2 \to H$ tai $\mathbb{K}^N \to H$ asettamalla $A((\lambda_k)_{k\in I}) = \sum_{k\in I} \lambda_k e_k$. Kuvaus A on isometrinen isomorfismi $\ell^2 \to H$ tai $\mathbb{K}^N \to H$:

L. 5.19: $\|Ax - Ay\| = \|x - y\|_2$ ja A lin. bijektio.

Saatiin: Kaikki separoituvat Hilbertin avaruudet ovat isomorfisia jolle joko ℓ^2 tai $\mathbb{R}^N$!

6. Hilbertin avaruudet ja Fourier-sarjat

(6.1.)

Ol. $L^2 = L^2(0,2\pi) = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{K} \;/\; \|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty\}$.

$n \in \mathbb{Z}$, f:n n:s <u>Fourier-termin</u>:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

- Jos $f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n (\cos(nx) + i\sin(nx))$ eli f

on trigonometrinen polynomi, niin $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-nx}\, dx = \hat{f}(n)$

$$\left(f(x)e^{-mx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i(n-m)x} \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)e^{-mx}\,dx = \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx \right.$$

$$\left. = \begin{cases} 2\pi c_m, & \text{kun } n=m \\ 0, & \text{kun } n \neq n \end{cases} \right)$$

- Jono $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ on ortonormaali

jono $(L^2(0,2\pi), (\cdot|\cdot))$:ssä kun $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

Tällöin $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{e^{inx}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f|e_n)$.

Jos $f \in L^2$ sen n:s <u>Fourier-osasumma</u> on

$$S_n(x) \equiv S_n(f;x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [0,2\pi]$$

6.1. <u>Lause</u> Fourier-osasummalle S_n pätee integraaliesitys

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\,dt, \quad \text{missä}$$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$ on n:s <u>Dirichlet-ydin</u> kun $n \in \mathbb{N}$.

<u>Tod</u>: $S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\,dt.$$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}(e^{ix})^k \overset{\text{geom sarja}}{=} e^{-inx}\frac{(1-e^{i(2n+1)x})}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})}_{= 2i\sin\frac{x}{2}} D_n(x) = e^{-ix/2}(e^{ix}-1)D_n(x) = e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x} = 2i\sin(n+\tfrac{1}{2})x$$

□.

(6.2.)

6.2. Lause Ol. $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)$ (Fejérin ydin)

Tällöin i) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x) = 1$$

ii) $K_n(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [0, 2\pi]$ ja $K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}$

kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta$.

Tod: i) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \delta_{n,0} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_k(x)\,dx}_{=1 \ \forall k} = 1.$$

ii) L.6.1 tod $\Rightarrow \quad (e^{ix}-1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (e^{ix}-1)\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}\right)$$

$$\parallel$$

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)$$

$$\Rightarrow (n+1)K_n(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) = (e^{-ix}-1)\left(e^{ix}\frac{(1-e^{i(n+1)x})}{1-e^{ix}} - \frac{(1-e^{-i(n+1)x})}{1-e^{-ix}}\right)$$

$$= 1 - e^{i(n+1)x} + 1 - e^{-i(n+1)x} = 2 - 2\cos((n+1)x)$$

$$(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) = 2 - e^{ix} - e^{-ix} = 2(1-\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad K_n(x) = \frac{1-\cos((n+1)x)}{(n+1)(1-\cos x)} \geq 0.$$

Kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta < 2\pi \Rightarrow$

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}. \ \square.$$