Esim Ol. $\mathcal{P} = \{ p : p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \mid a_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \}$

$(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ normiavaruus, kun $\|p\| = \max\{|a_k|\}$

Derivaattakuvaus $D : \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$ lin.

mutta ei rajoitettu! Jos $p_n(z) = z^n$ $\quad Dp_n = nz^{n-1}$

$\|p_n\| = 1, \quad \|Dp_n\| = n \Rightarrow \sup\{ \|Dp\| \mid \|p\|=1, p \in \mathcal{P}\} = \infty$

$\therefore$ $D$ ei rajoitettu operaattori.

4.3. Lause Ol. $X, Y$ normiavaruuksia, $A : X \to Y$ lin. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $A$ on rajoitettu operaattori

(ii) $A$ on jatkuva $X$:ssä

(iii) $A$ on jatkuva yhdessä pisteessä $x_0 \in X$.

Tod! (i) $\Rightarrow$ (ii) : Ol. $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$

$$\|Ax - Ay\| \overset{\text{lin.}}{=} \|A(x-y)\| \overset{\text{raj.}}{\leq} \|A\| \|x-y\| < \varepsilon \quad \text{kun} \quad \|x-y\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) selvä

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Ol. $A$ jatk. pist. $x_0 \in X$ $\Rightarrow$ Jos $\varepsilon > 0$ niin $\exists\, \delta > 0$ s.e. $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

Jos $x \in X$ ja $\|x\| < \delta$ niin pätee

$$\|Ax\| \overset{\text{lin.}}{=} \|A(x + x_0) - Ax_0\| < \varepsilon$$

Jos $x \in B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, niin $\|\delta x\| = \delta\|x\| \leq \delta$
$\Rightarrow$

$$\delta \|Ax\| = \|A\delta x\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall\, x \in B_X. \quad \square$$

Onko normiavaruus $(\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y}), \|\cdot\|)$ täydellinen?

**Huom.** Kuvausjonon $(f_n)$ $f_n : M \to \mathbb{Y}$, $M \subset \mathbb{X}$ pisteittainen suppeneminen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall\, x \in M$ säilyttää lineaarisuuden (HT), mutta ei yleensä jatkuvuutta.

**Esim.** Ol. $\mathcal{P} = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid x$ on polynomi$\}$ $\|x\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} |x(t)|$ kun $x \in \mathcal{P}$. Asef. $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$A_n x = n\left(x(1) - x\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\right)$$

$A_n : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ lin. ja $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P},\mathbb{R})$:

$$|x(1)|,\ \left|x\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\right| \le \|x\|_\infty \implies \|A_n x\| \le 2n\|x\|_\infty$$

$\implies \|A_n\| \le 2n$. Toisaalta

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} \frac{x(1) - x(1-\frac{1}{n})}{1/n} = x'(1)$$

$\therefore$ jono $(A_n)$ suppenee pisteittäin kohti lin. kuvausta $A : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x'(1)$ joka ei jatkuva: Jos $x_n(t) = t^n$, niin $\|x_n\|_\infty = 1$ ja $|Ax_n| = |x_n'(1)| = n \implies \|A\| \ge \sup_n |Ax_n| = \infty$.

4.3. **Määritelmä** Ol $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Jono $(A_n)$ suppenee kohti operaattoria $A$ **normin mielessä** jos pätee $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

Merk. lyhyesti $A_n \to A$.

**Huom.** Jos $A_n \to A$ normin mielessä, niin $A_n x \to Ax$ $\forall\, x \in \mathbb{X}$ pisteittäin:

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\|\,\|x\| \to 0$$

kun $n \to \infty$.

käänteinen väite ei päde:

Esim $A_n : \ell^1 \to \ell^1$, $A_n x = (\underbrace{0, \dots 0}_{n-1 \text{ kpl}}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$

kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\|A_n x\|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|x\|_1 \quad \forall\, x \in \ell^1$$

$\therefore$ $A_n$ jatkuva ja $\|A_n\| \leq 1$

Lisäksi $A_n x \to \bar{0}$ $\forall\, x \in \ell^1$ eli $A_n \to \bar{0}$ pisteittäin

Toisaalta $A_n \not\to \bar{0}$ normin mielessä:

Jos $e_n = (\underbrace{0, \dots 0}_{n-1 \text{ kpl}}, 1, 0, \dots) \in \ell^1$ niin $A_n e_n = e_n$

ja $\|A_n e_n\|_1 = \|e_n\|_1 = 1 \Rightarrow \|A_n\| = 1 \quad \forall\, n$.

4.4. Lause Jos $X$ on normiavaruus ja $Y$ Banach-avaruus niin $\mathcal{L}(X, Y)$ on Banach-avaruus.

Tod: Ol. $(A_n)$ Cauchy jono avaruudessa $\mathcal{L}(X, Y)$ ja $x \in X$.
Pätee:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N},$$

joten $(A_n x)$ on Cauchy jono $Y$:ssä, $Y$ täydellinen $\Rightarrow$ $(A_n x)$ suppenee, merk $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

$\therefore$ $A_n x \to Ax$ pisteittäin, joten $A : X \to Y$ lin.

Riittää os: $A$ jatkuva ja $\|A_n - A\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Ol. $\varepsilon > 0$ $(A_n)$ Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $\forall\, n, m \geq n_0$
$\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$. Jos $x \in X$ ja $\|x\|_X \leq 1$ niin saadaan

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\|_X \leq \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

kun $m \to \infty$ ($n$, $x$ kiinni) $\Rightarrow$

$$\|A_n x - Ax\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|A_n x - A_m x\|_Y \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|(A_n - A)x\|_Y \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0 \text{ ja } \|x\|_X \leq 1$$

Erityisesti siis lin. kuvaus $A_{n_0} - A : \bar{X} \to \bar{Y}$ on jatkuva

$\Rightarrow \quad A = A_{n_0} - (A_{n_0} - A) : \bar{X} \to \bar{Y}$ jatkuva

Lisäksi $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(A_n - A)x\|_{\bar{Y}} \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$

$\therefore \quad A_n \to A$ avaruudessa $(\mathcal{L}(\bar{X}, \bar{Y}), \|\cdot\|)$. $\square$.

Os. seuraavaksi hyödyllinen laajennusominaisuus jatkuville operaattoreille:

4.5. Lause Ol. $\bar{X}$ normiavaruus, $\bar{Y}$ Banach-avaruus ja $D(A) \subset \bar{X}$ v.a.a. ja $A : D(A) \to \bar{Y}$ jatkuva lin. kuvaus. Tällöin löytyy 1-käsitteinen jatkuva lin. kuvaus $\bar{A} : \overline{D(A)} \to \bar{Y}$ s.e. $\bar{A}x \overset{(*)}{=} Ax \quad \forall \; x \in D(A)$ ja $\|A\| = \|\bar{A}\|$.

Tod: Ol. $x \in \overline{D(A)} \Rightarrow \exists$ jono $(x_n) \subset D(A)$ s.e. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, olk. $p, q \in \mathbb{N}$!

$\|Ax_p - Ax_q\| = \|A(x_p - x_q)\| \le \|A\| \, \|x_p - x_q\|$, joten

$(Ax_n) \subset \bar{Y}$ on Cauchy-jono. $\bar{Y}$ Banach $\Rightarrow$ jonolla $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raja-arvo $\bar{A}x \in \bar{Y}$ (symbolinen merkintä: raja-arvo riippuu pisteestä $x \in \bar{X}$.)

Os. $\bar{A}x$ riippumaton jonon $(x_n) \subset D(A)$ valinnasta:
Ol. $(y_n) \subset D(A)$ toinen jono s.e. $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Kuten edellä, löytyy raja-arvo $y = \lim_{n\to\infty} Ay_n \in \bar{Y}$. Nyt

$\|x_n - y_n\| \to \|x - x\| = 0$ joten kuvauksen $A$ jatkuvuus $\Rightarrow$

$\bar{0} = \lim_{n\to\infty} A(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n - \lim_{n\to\infty} Ay_n = \bar{A}x - y. \quad \therefore y = \bar{A}x$

$\Rightarrow \quad \bar{A} : \overline{D(A)} \to \bar{Y}$ hyvin määritelty.

Jos $x \in D(A)$ void. valita $x_n = x \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ja
$\bar{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Os. $\overline{A}: \overline{D(A)} \to \overline{Y}$ lin.: Olk. $x, y \in \overline{D(A)}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ (1.7.)

Olk. $(x_n), (y_n) \subset D(A)$ jonot s.e. $x_n \to x$, $y_n \to y$

$\Rightarrow$ jono $(z_n) := (x_n + \alpha y_n) \subset D(A)$ ja $z_n \to x + \alpha y$

Saadaan: $\overline{A}(x+\alpha y) = \lim_{n\to\infty} A(x_n + \alpha y_n) \overset{A\text{ lin.}}{=} \lim_{n\to\infty} Ax_n + \lim_{n\to\infty} \alpha A y_n$

$= \overline{A}x + \alpha \overline{A}y$.

Os. $\|\overline{A}\| = \|A\|$: Jos $x \in \overline{D(A)}$ niin $(x_n) \subset D(A)$ s.e. $x_n \to x$.

Nyt $\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$.

Pätee $\|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ja

$\|x\| - \|x_n - x\| \leq \|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$

Saadaan: $\|\overline{A}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A\|\|x_n\| = \|A\|\|x\|$,

joten $\overline{A}$ jatkuva ja $\|\overline{A}\| \leq \|A\|$.

Jos $x \in D(A)$ niin $\|Ax\| = \|\overline{A}x\| \leq \|\overline{A}\|\|x\| \Rightarrow \|A\| \leq \|\overline{A}\|$.

$\therefore$ $\|A\| = \|\overline{A}\|$

$\overline{A}$ 1-käs: Ol. $\tilde{A}: \overline{D(A)} \to \overline{Y}$ lin. s.e. $\tilde{A}x = Ax$ $\forall x \in D(A)$

Kuvaus $\tilde{A} - \overline{A}: \overline{D(A)} \to \overline{Y}$ jatkuva, joten $\forall x \in \overline{D(A)}$

pätee $(\tilde{A} - \overline{A})(x) = \lim_{n\to\infty} (\tilde{A} - \overline{A})(x_n) = 0$ $\forall$ jonolla

$(x_n) \subset D(A)$ $x_n \to x$. $\therefore$ $\tilde{A}x = Ax$ $\forall x \in \overline{D(A)}$. $\square$.

2.4.5 keskeinen tulos lin. operaattoreiden teoriassa:

<u>Esim.</u> Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ ja aset. f:n Fourier-

muunnos: $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$

Pätee $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)| \quad \forall\, x,k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ muunnos (7.8.)

hyvin määritelty $\forall\, f \in L^1(\mathbb{R})$. Voidaanko muunnos

määritellä $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R})$? $\quad L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ $\big(x \mapsto \min\{1, |x|^{-1}\}$
$\in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})\big)$.

Ol. $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Voidaan os

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

eli kun $D(A) = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ niin operaattori

$A: f \mapsto \hat{f}$ ja $\|Af\|_2 = \|f\|_2$ (isometria)

L. 4.5 $\Rightarrow$ $\exists$ jatko $\bar{A}: \overline{D(A)} \to L^2(\mathbb{R})$. Lisäksi

pätee $\overline{D(A)} = L^2(\mathbb{R})$.

4.6. Lause Ol. $X$ äärellisulotteinen normiavaruus, $Y$ normiavaruus ja $A: X \to Y$ lineaarinen. Tällöin $A$ on jatkuva.

Tod: Ol. $\|\cdot\|$ $X$:n normi. Määritellään $\forall\, x \in X$
$\|x\|_1 = \|x\| + \|Ax\|$, V: $\|\cdot\|_1$ $X$:n normi
$Y$:n normi

(i) $\|x\|_1 = \|x\| + \|Ax\| \geq 0 \quad \forall\, x \in X$

(ii) Ol $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 = \|Ax\| \Rightarrow x = 0$.
Jos $x = 0 \Rightarrow \|x\| = \|Ax\| = 0 \Rightarrow \|x\|_1 = 0$

(iii) $\|\lambda x\|_1 = \|\lambda x\| + \|A\lambda x\| = |\lambda|\|x\| + |\lambda|\,\|Ax\|$
$= |\lambda|\,\|x\|_1$

(iv) $\|x+y\|_1 = \|x+y\| + \|A(x+y)\| \leq \|x\| + \|y\| + \|Ax\| + \|Ay\|$
$= \|x\|_1 + \|y\|_1$.

$X$ ääräell. ul. $\Rightarrow$ normit $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ ekvivalentteja $X$:ssä
$\Rightarrow \exists\, K > 0$ s.e. $\|x\|_1 \leq K\|x\| \quad \forall\, x \in X$
$\Rightarrow$
$\|Ax\| \leq \|x\|_1 \leq K\|x\| \quad \forall\, x \in X$ l. $A$ rajoitettu. □

4.7. Lause Ol. $X, Y, Z$ normiavaruuksia ja $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Tällöin $BA := B \circ A : X \to Z$ ja $BA \in \mathcal{L}(X,Z)$. (4.9.)

Tod: lin. selvä. Jos $x \in X$ ja $\|x\| \le 1$ niin

$$\|BA(x)\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \le \|B\| \, \|Ax\|_Y \le \|B\| \, \|A\| \,. \square$$

4.8. Määritelmä Banach-avaruus $X$ on Banach-algebra jos avaruudessa $X$ on määritelty tulo s.e. $\forall\, x, y \in X$ pätee:

$$\|xy\| \le \|x\| \, \|y\|$$

ja algebran ehdot: $x(yz) = (xy)z$ (liitännäisyys)

$x(y+z) = xy + yz$, $(x+y)z = xz + yz$ (osittelulait)

$(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ $(\lambda \in \mathbb{K})$

Esim. 1° $\mathcal{L}(X)$ on Banach algebra (tulo = kuvausten yhdistäminen)

2° Jos $X$ kompakti metrinen avaruus, niin $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach-algebra kun tulo: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\forall\, f, g \in C(X)$.

$\leftarrow$

4.9. Lause Ol. $A : X \to Y$ lin. bijektio ($X, Y$ normiavaruuksia). Tällöin $A^{-1} : Y \to X$ lin. ja

$A^{-1}$ on jatkuva $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha > 0$ s.e. $\|Ax\| \ge \alpha \|x\|$ $\forall\, x \in X$

Tod lin: $A(\lambda A^{-1}x + \mu A^{-1}y) = \lambda x + \mu y$
$= A(A^{-1}(\lambda x + \mu y))$

$A$ bij. $\Rightarrow$ $\lambda A^{-1}x + \mu A^{-1}y = \lambda x + \mu y$.

"$\Rightarrow$" $A^{-1}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ joten voi ol. $X \ne \{\bar{0}\} \ne Y$

$\Rightarrow \exists\; 0 \ne x \in X$ s.e.

$$0 < \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\| < \infty$$

Ol. $x \in X$ $\Rightarrow$ $\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \le \|A^{-1}\| \, \|Ax\|$

$\Rightarrow \dfrac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \le \|Ax\|$ $\Rightarrow$ voi val $\alpha = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$.

"$\Leftarrow$" Ol. $\|Ax\| \ge \alpha \|x\|$ $\forall\, x \in X$. Jos $y \in Y$ niin aset.

$x = A^{-1}y \Leftrightarrow Ax = y$ ja

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \le \frac{\|Ax\|}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\|y\| \,. \quad \therefore \|A^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha} < \infty \quad \square.$$

Huom. L.4.9 ei oleteta $A$ jatkuva!

(4.10.)

4.10. <u>Seuraus</u> Ol. $\underline{X}, \underline{Y}$ normiavaruuksia ja $A: \underline{X} \to \underline{Y}$ lin. bijektio. Tällöin $A$ on homeomorfismi $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta > 0$ s.e. $\alpha \|x\| \leq \|Ax\| \leq \beta \|x\|$.

4.11. <u>Määritelmä</u> Jos $A \in \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{Y})$ on homeomorfismi niin $A$ on <u>lineaarinen isomorfismi</u> ja <u>avaruudet</u> $\underline{X}, \underline{Y}$ ovat <u>isomorfiset</u>.

Jos $\alpha, \beta = 1$ niin $A$ on <u>isometria</u>.

4.12. <u>Määritelmä</u> Ol. $\underline{X}$ Banach-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(\underline{X})$. Jos $\exists$ jatkuva $A^{-1} \in \mathcal{L}(\underline{X})$ niin $A$ on <u>kääntyvä operaattori</u>.

Merk. $A^k = \overbrace{A \circ \dots \circ A}^{k\ \text{kpl}}$

4.12. <u>Lause</u> Ol. $\underline{X}$ Banach-avaruus ja $A \in \mathcal{L}(\underline{X})$ jva lin. Jos $\|A\| < 1$, niin operaattori $I - A$ on kääntyvä ja $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (Neumann sarja) ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ suppenee. Lisäksi $\|(I-A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

<u>Tod</u>: L.4.7 $\Rightarrow \|A^k\| \leq \|A\|^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty$, kun $\|A\| < 1$ (geom. sarja!)

$\mathcal{L}(\underline{X})$ Banach $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ suppenee ja

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k \in \mathcal{L}(\underline{X})$$

Lisäksi pätee:

$$(I - A) S_n = I + A + \dots + A^n - (A + \dots + A^{n+1})$$
$$= I - A^{n+1} = S_n (I - A)$$

$\Rightarrow$

$$\|(I-A) S_n - I\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty$$

eli $(I - A) S = I$

Samoin $S(I-A) = I$ eli $S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ on operaattorin $I - A$ käänteisoperaattori ja $\|(I-A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

Huom kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän!
Jos $A, B \in \mathcal{L}(X)$ kääntyviä, niin $AB \in \mathcal{L}(X)$ on kääntyvä ja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Topologisesti:

4.13. Lause Ol. $X$ Banach-avaruus. Tällöin pätee
(i) Jos $A \in \mathcal{L}(X)$ kääntyvä ja $B \in \mathcal{L}(X)$ s.e. $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, niin $A - B$ on kääntyvä

(ii) $\{A \in \mathcal{L}(X) \mid A \text{ kääntyvä}\} \subset_o \mathcal{L}(X)$.

Tod: (i): $A - B = A(I - A^{-1}B)$, $\|A^{-1}B\| \le \|A^{-1}\|\|B\| \overset{ol.}{<} 1$
Neumann $\Rightarrow$ $(I - A^{-1}B)$ kääntyvä
$\overset{(Huom.)}{\Rightarrow}$ $A - B$ kääntyvä.
(ii): OS. $B(A, \|A^{-1}\|^{-1}) \subset \{B \in \mathcal{L}(X) \mid B \text{ kääntyvä}\}$
$\forall$ kääntyvillä $A \in \mathcal{L}(X)$:
Olk. $C \in B(A, \|A^{-1}\|^{-1})$ l. $\|A - C\| < \|A^{-1}\|^{-1}$
$(i) \Rightarrow$ $C = A - (A - C)$ on kääntyvä. □

Esim Olk. $c \in \mathbb{C}$ ja $k: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,
s.e. $k(x,y) = c \sin(x - y)$.
Osoita, että jos $|c| < 1$ niin $\forall f \in C[0,1]$ $\exists$ $g$ s.e. $g(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,y) g(y) dy$ $(*)$

Tod: Lin. kuvaukselle $K: C[0,1] \to C[0,1]$

$$(K(g))(s) = \int_0^1 k(s,t) g(t) dt$$

pätee $\|K(g)\|_\infty \le |c| \|g\|_\infty$ eli $\|K\| \le |c|$

integraaliyhtälö $(*)$ $\Leftrightarrow$ $(I - K)g = f$

$|c| < 1 \overset{2.4.12}{\Rightarrow}$ $(*)$:llä 1-käs ratkaisu $g = (I - K)^{-1} f$.

# 5. Hilbertin avaruudet

(5.1.)

Olk $\overline{X}$ $\mathbb{K}$-kertoiminen v.a. Kuvaus $f: \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{K}$ on **Hermiten muoto** jos pätee

(i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \quad \forall\, x_1, x_2, y \in \overline{X}$

(ii) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \quad \forall\, x, y \in \overline{X},\ \lambda \in K$

(iii) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}, \quad \forall\, x, y \in \overline{X}$

Huom 1° Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : (iii) : $f(y, x) = f(x, y) \quad \forall\, x, y \in \overline{X}$

2° $f(x, y_1 + y_2) = \overline{f(y_1 + y_2, x)} = \overline{f(y_1, x)} + \overline{f(y_2, x)} = f(x, y_1) + f(x, y_2)$

$f(x, \lambda y) = \overline{f(\lambda y, x)} = \overline{\lambda f(y, x)} = \overline{\lambda} f(x, y), \quad x, y_1, y_2 \in \overline{X},\ \lambda \in \mathbb{K}$

3° $\forall\, y \in \overline{X}$ : $f(\overline{0}, y) = f(0 \cdot \overline{0}, y) \overset{(ii)}{=} 0 \cdot f(\overline{0}, y) = 0$

(iii) $\Rightarrow f(y, \overline{0}) = \overline{f(\overline{0}, y)} = 0 . \quad \forall\, y \in \overline{X}$

Hermiten muoto on **sisätulo** jos lisäksi pätee

(iv) $f(x, x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \overline{X}$

(v) $f(x, x) = 0 \iff x = \overline{0}$ .

Jos $f$ on sisätulo merk. $(x, y) = f(x, y) \quad \forall\, x, y \in \overline{X}$

ja $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Joskus merk. $(x, y) = (x | y)$

Vektoriavaruus $\overline{X}$ varustettuna sisätulolla $(\cdot | \cdot)$ on **sisätuloavaruus** $(\overline{X}, (\ ,\ ))$

Ol. $(\overline{X}, (\cdot, \cdot))$ sisätuloavaruus.

5.1. **Cauchy–Schwarzin epäyhtälö** : $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$

Tod: Jos $y = 0$ ok selvä. Ol. $y \neq 0$. $\forall\, \alpha \in K$ pätee

$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = (x - \alpha y, x - \alpha y) = (x, x) - \overline{\alpha}(x, y) - \alpha\underbrace{[(y, x) - \overline{\alpha}(y, y)]}_{[\ ] = 0}$

Val. $\overline{\alpha} = \dfrac{(y, x)}{(y, y)} \Rightarrow 0 \leq (x, x) - \dfrac{(y, x)}{(y, y)}(x, y) = \|x\|^2 - \dfrac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}$

$\Rightarrow |(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad \square.$

5.2. Seuraus $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ on normi. (5.2)

– $\forall x \in X$ $\|x\| \geq 0$ selvä.

(N1): $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \underbrace{(x,y) + (y,x)}_{= 2\,\mathrm{Re}\,(x,y) \leq 2|(x,y)|} + \|y\|^2$

$\leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \overset{5.1.}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$.

(N2) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}(x,x)} = |\alpha|\,\|x\|$.

(N3) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \overset{(v)}{\Leftrightarrow} x = \bar{0}$. □.

Esim $L^2(a,b) \ni f, g$ $(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$

C-S: $\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$

= Hölder, kun $p = 2$.

5.3. Määritelmä Täydellinen sisätuloavaruus $(X, (\cdot,\cdot))$ on Hilbertin avaruus

Esim. 1° $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$

$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ Hilbert

2° $x = (x_k)$ $y = (y_k) \in l^2$ $(x,y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \bar{y}_j$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2\right)^{1/2}$ $(l^2, \|\cdot\|_2)$ Hilbert

Huom. Hölder $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^\infty |x_k \bar{y}_k| \leq \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k|^2\right)^{1/2} < \infty$

kun $(x_k), (y_k) \in l^2$ joten $\sum_{k=1}^\infty x_k \bar{y}_k$ suppenee itseisesti

Kissa $\Rightarrow$ $(\cdot,\cdot)$ mielekäs.

3° $C(-1,1) = \{ f : [-1,1] \to \mathbb{K} \mid f$ jatkuva$\}$ v.a.

sisätulo $(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ $f, g \in C(0,1)$

$\|f\|_2 = \left( \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$

$(C(-1,1), \|\cdot\|_2)$ ei Hilbert (kuten esim. 1.5).

7° $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko

$L^2(\Omega) = \{ [f] \mid \left( \int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \}$

$L^2(\Omega)$ varustettuna sisätulolla

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad , \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

on Hilbert (tod: reaalianalyysi)

$(f,g)$ hyvin määritelty (Hölder ey. integraaleille)

Voidaan os. $\overline{C(0,1)} = L^2(0,1)$ v.a.n $C(0,1)$ täydentymä normin $\|\cdot\|_2$ suhteen.

Milloin normi on sisätulon indusoima?

5.4. Suunnikasyhtälö Jos $X$ on sisätuloavaruus, niin

$\forall x, y \in X$ pätee: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Tod: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$

$(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y)$

$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Piirrä kuva!

Esim 1° $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ ei sisätulon indusoima:

Val. $f, g \in C(0,1)$ $\quad f \equiv 1$, $g : g(x) = x$, $x \in [0,1]$

$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2^2 + 1 = 5$ ✗

$2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 2 \cdot (1+1) = 4$

$2^\circ$ $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ei Hilbert.

val. $x = (1,0,\dots), y = (0,1,0,\dots) \in \ell^1$

$$\left.\begin{array}{l} \|x+y\|_1 = \|(1,1,0,\dots)\|_1 = 2 \\ \|x-y\|_1 = \|(1,-1,0,\dots)\|_1 = 2 \\ \|x\|_1 = 1 = \|y\|_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2(1+1)$$

□.

Ol. $(\bar{X}, (\cdot|\cdot))$ sisätuloavaruus

5.5. Määritelmä Joukon $M \subset \bar{X}$ ortokomplementti $M^\perp$ on joukko

$$M^\perp := \{ y \in \bar{X} \mid (x|y) = 0 \ \forall x \in M \}$$

5.6. Lause Kuvaus $(x,y) \mapsto (x|y)$, $\bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{K}$ on jatkuva.

Tod: $|(x|y) - (x_0|y_0)| = |(x|y) - (x|y_0) + (x|y_0) - (x_0|y_0)|$

$$\overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} |(x|y) - (x|y_0)| + |(x|y_0) - (x_0|y_0)| = |(x|y-y_0)| + |(x-x_0|y_0)|$$

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} \underbrace{\|x\|}_{\text{raj!}} \|y-y_0\| + \|x-x_0\| \|y_0\| \to 0 \quad \text{kun } x \to x_0, \ y \to y_0.$$

5.7. Lause Jos $M \subset \bar{X}$, niin $M^\perp$ on $\bar{X}$:n suljettu vektorialiavaruus

Tod: $M^\perp$ v.a.a. (HT)

$M^\perp$ suljettu! Olk. $x \in \bar{X}$ $x^\perp = f_x^{-1}(0)$, missä $f_x: \bar{X} \to \mathbb{K}$ jatkuva kuvaus $f_x(y) = (x|y)$.

Siis $x^\perp$ suljetun joukon $\{0\}$ alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa suljettu.

Jos $M \subset \bar{X}$ niin $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$ on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu. □

Huom. $1^\circ$ $\{\bar{0}\}^\perp = \bar{X}$

$2^\circ$ $\bar{X}^\perp = \{\bar{0}\}$: $(x|y) = 0 \ \forall y \in \bar{X}$ erit. kun $y = x$
$\Rightarrow (x|x) = 0 \Rightarrow x = \bar{0}$

$3^\circ$ $M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$

5.8. Seuraus $(x|y_1) = (x|y_2) \ \forall x \in \bar{X} \Rightarrow y_1 = y_2$

Tod: $(x|y_1 - y_2) = 0 \quad \forall x \in \bar{X} \Rightarrow y_1 - y_2 \in \bar{X}^\perp = \{\bar{0}\}$. □.