Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

Harj. (6.)
26.10.2007

Peltonen / Aalto

1) Olkoot $U = \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid s_{2n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ ja
$V = \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid s_{2n-1} = n s_{2n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.
Osoita, että ℓ^1:n vektorialiavaruudet U ja V ovat suljettuja, mutta $U \oplus V$ ei ole suljettu
(Vihje: Osoita ensin, että $\{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid s_n \neq 0$ enintään äärellisen monella indeksillä$\} \subset U \oplus V$).

2) a) Määrää funktioiden $f: t \mapsto t$ ja $g: t \mapsto t^2$ Fourier-kertoimet Hilbertin avaruuden $L^2(-\pi,\pi)$ Hilbertin kannan $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ suhteen

b) Osoita Plancherelin kaavan avulla, että pätee $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Etsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

3) Banach–Steinhausin lauseen mukaan operaattoriperheelle $\{A_n : X \to Y \mid A_n$ lineaarinen ja jatkuva, $n \in \mathbb{N}\}$ (X, Y Banach-avaruuksia) pätee joko (1) $\exists\, C \in [0,\infty[$ s.e. $\|A_n\| \le C \ \forall n \in \mathbb{N}$ tai (2) $\exists\, x \in X$ s.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| = \infty$. Tutki seuraavissa tapauksissa, kumpi vaihtoehto pätee.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$ $A_n : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_k \chi_n(k))_{k=1}^{\infty}$, missä $\chi_n(k) = 1$ jos $k \le n$ ja $\chi_n(k) = 0$ jos $k > n$

b) $X = Y = (C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ ja $A_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$.

c) $X = Y = L^2(\mathbb{R})$, $A_n f(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

4) Olkoot X, Y ja Z Banach-avaruuksia. Kuvaus $A : X \times Y \to Z$ on bilineaarinen, jos kuvaukset $A_{1,z} : X \to Z$, $A_{1,z}(x) := A(x,z)$ ja $A_{2,w}(y) := A(w,y)$ ovat lineaarisia $\forall\, w \in X$ ja $z \in Y$.
Osoita Banach–Steinhausin lauseen avulla, että A on rajoitettu (eli $\|A\| := \sup\{\|A(x,y)\|_Z \mid \|x\|_X \le 1, \|y\|_Y \le 1\} < \infty$) jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_{1,z}$ ja $A_{2,w}$ ovat rajoitettuja kaikilla $w \in X$ ja $z \in Y$.