Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet — Harj. (4) 12.10.2007

Pellonen/Aalto

1) Olkoon $w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ jono kompleksilukuja.
Määritellään operaattori $D_w : \ell^2 \to \ell^2$ asettamalla
$D_w x = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots)$. Osoita, että D_w on jatkuva
jos ja vain jos $\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j| \le M < \infty$.
Osoita, että jos D_w on jatkuva niin $\|D_w\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j|$.

2) Ol. $D_w : \ell^2 \to \ell^2$ kuten edellisessä tehtävässä ja $\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j| \le M < \infty$
Osoita, että D_w on kääntyvä jos ja vain jos $\inf_{j \in \mathbb{N}} |w_j| > 0$.
Määrää kuvauksen D_w^{-1} lauseke.

3) Ol. D_w kuten yllä ja $\inf_{j \in \mathbb{N}} |w_j| > 0$, $\sup_{j \in \mathbb{N}} |w_j| \le M < \infty$.
Mitkä seuraavista yhtälöistä/epäyhtälöistä pätevät kaikilla
tällaisilla $w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$?

a) $\|D_w\| = \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$ b) $\|D_w\| \ge \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$ c) $\|D_w\| \le \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$

d) $\|D_w\| < \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$ e) $\|D_w\| > \dfrac{1}{\|D_w^{-1}\|}$.

4) Olkoot $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ ja $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$, $z \in \ell^r$ ja

$xyz := (x_j y_j z_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Osoita, että $xyz \in \ell^1$ ja

$\|xyz\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q \|z\|_r$. (Vihje: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} =: \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{q/s} + \frac{1}{r/s} = 1$)

5) Olkoon $p \in (1, \infty)$ $x^1, x^2 \in \ell^p$ tai L^p s.e. $\|x^i\|_p = 1$
$i = 1, 2$. a) Osoita, että pätee:

$$\left\| \frac{x^1 + x^2}{2} \right\|_p = 1 \Rightarrow x^1 = x^2 \quad \text{(aito konveksius)}.$$

Mitä tämä tarkoittaa yksikkökuulan muodolle?

b) Totea, että seuraavat avaruudet eivät ole aidosti konvekseja: ℓ^1, ℓ^∞, c_0, $C[0,1]$, $L^1[0,1]$.