Reissner-Mindlin laattamalli

(Kirjan Sec. 7.12). Menetellään analogisesti kuin Timoshenko palkin tapauksessa. Saamme liukukulmat sekä x-, että y-suunnassa:

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \,, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x$$

ja rotaatiovektori $\underline{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$,

Siirtymät x- & y-suunnissa ovat nyt

$$u_x = -\theta_x z$$

$$u_y = -\theta_y z \,.$$

Saamme venymät

p.v.

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} z$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} z$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) z$$

ja

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right)$$

Teemme taas tasojännitys oletuksen

$$\tau_{xx} = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)(\varepsilon_{xx} + \nu\, \varepsilon_{yy})$$

$$\tau_{yy} = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)(\varepsilon_{yy} + \nu\, \varepsilon_{xx})$$

$$\tau_{xy} = 2G\, \varepsilon_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 2G\, \varepsilon_{xz}$$

$$\tau_{yz} = 2G\, \varepsilon_{yz}.$$

Siis

$$\tau_{xx} = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)(-z)$$

$$\tau_{yy} = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)(-z)$$

$$\tau_{xy} = 2G \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)(-z)$$

$$= G\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)(-z)$$

Momenteille saadaan siis, $D = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right),$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)$$

ja

$$M_{xy} = G \frac{t^3}{12}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{(1-\nu)D}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)$$

Leikkausvoimille saadaan

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}\, dz$$

$$= 2G \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{xz}\, dz = 2G \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right)$$

$$= Gt\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right)$$

Samoin

$$Q_y = Gt\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right).$$

Momenttien ja leikkausvoimien tasapainoyhtälö sekä leikkausvoiman ja ulkoisen kuorman yhtälö säilyy samana, joten päädytään differentiaaliyhtälösysteemiin

$$M_x = -D\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right),$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right),$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)\frac{D}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right),$$

$$Q_x = Gt\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right)$$

$$Q_y = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right),$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x , \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y ,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 .$$

Reunaehdot ovat nyt

Γ_C – jäykästi tuettu

$$w = 0 , \quad \theta_x = 0 , \quad \theta_y = 0 .$$

Tai "pehmeä" jäykkä

$$w = 0 , \quad \theta_\nu = 0 ,$$

ja luonnollinen ehto $M_{\nu s} = 0$.

Γ_S – vapaasti tuettu

kova: $w = 0 , \quad \theta_s = 0 , \quad M_\nu = 0$

pehmeä: $w = 0 , \quad M_{\nu s} = 0 , \quad M_\nu = 0$.

Γ_F Täysin vapaa.

$$M_\nu = 0 , \quad M_{\nu s} = 0 , \quad Q_\nu = 0 .$$

Tässä ei siis tarvita korvikeleikkausvoimaa.

RM-laatan energia & variaatioformulointi

K-malliin verrattuna energiaan sisältyy leikkauksesta syntyvä osa.

Jos aluksi oletetaan, että luonnolliset reunaehdot ovat homogeenisia, energia on

$$\Phi(w,\theta) = \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{yy}\varepsilon_{yy} + 2\tau_{xy}\varepsilon_{xy})\, dt\, dA$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{-t/2}^{t/2} (2\tau_{xz}\varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz}\varepsilon_{yz})\, dt\, dA - \int_\Omega q\, dA$$

$$= \frac{D}{2}\int_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\Big)\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \Big(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\Big)$$

$$+ 2(1-\nu)\Big(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\Big)^2\Big]\, dA$$

$$+ \frac{Gt}{2}\int_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\Big)^2\Big]\, dA$$

$$- \int_\Omega q\, dA,$$

Tensorimerkinnät taas

havainnollistaa energian.

$$M_{11}(\underline{\theta}) = -D(\theta_{1,1} + \nu\,\theta_{2,2})$$

$$M_{22}(\underline{\theta}) = -D(\theta_{2,2} + \nu\,\theta_{1,1}$$

$$M_{12}(\underline{\theta}) = -D(1-\nu)\,\frac{1}{2}\,(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) .$$

Siis $\theta_1 = \theta_x \,, \; \theta_2 = \theta_y$

$\theta_{1,1} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$ jne.

Lisäksi

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}) = \varepsilon_{ij}(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) .$$

Taivutusenergia on nyt

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega} M_{ij}(\underline{\theta})\,\varepsilon_{ij}(\underline{\theta})\,dA .$$

Leikkausenergia on

$$\frac{Gt}{2}\int_{\Omega}(w_{,i} - \theta_i)(w_{,i} - \theta_i)\,dA .$$

$$= \int_{\Omega} Q_i\,(w_{,i} - \theta_i)\,dA ,$$

missä $Q_i = Q_i(w, \underline{\theta})$

Siis

$$\Phi(w,\underline{\theta}) = -\frac{1}{2}\int_\Omega M_{ij}(\underline{\theta})\,\varepsilon_{ij}(\underline{\theta})\,dA$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega Q_i(w,\underline{\theta})\,(w_{,i}-\theta_i)\,dA$$

$$-\int_\Omega q\,w\,dA.$$

Olkoon $W \times \underline{\Theta}$ kinemaattisesti luvalliset funktiot. Variaatio muoto on: etsi $(w,\underline{\theta}) \in W \times \underline{\Theta}$ s.e.

$$-\int_\Omega M_{ij}(\underline{\theta})\,\varepsilon_{ij}(\underline{\varphi})\,dA + \int_\Omega Q_i(w,\underline{\theta})(v_{,i}-\varphi_i)\,dA$$

$$= \int_\Omega q\,v\,dA$$

$$\forall (v,\underline{\varphi}) \in W \times \underline{\Theta}.$$

Osittaisintegroinnit:

$$-\int_\Omega M_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\underline{\varphi})\,dA = +\int_\Omega M_{ij,j}\,\varphi_i\,dA$$

$$-\int_{\partial\Omega} M_{ij}\,\nu_j\,\varphi_i\,dS \qquad \text{ja}$$

$$\int_\Omega Q_i v_{,i} \, dA$$

$$= - \int_\Omega Q_{i,i} v \, dA + \int_{\partial\Omega} Q_i \nu_i v \, dS .$$

Siis: Jos ratkaisu on "smooth enough" niin variaatiomuodosta seuraa, että

$$\int_\Omega [+ M_{ij,j} - Q_i] \varphi_i \, dA$$

$$+ \int_\Omega [- Q_{i,i} - q] v \, dA$$

$$- \int_{\partial\Omega} M_{ij} \nu_j \varphi_i \, dS + \int_{\partial\Omega} Q_i \nu_i v \, dS = 0 .$$

$$\forall (v, \underline{\varphi}) \in W \times \underline{\Theta} .$$

Saadaan tutut tasapaino-yhtälöt

$$\left. \begin{array}{l} M_{ij,j} = Q_i \\ Q_{i,i} + q = 0 . \end{array} \right\} \ \Omega\text{:ssa.}$$

Reunatermi

$$\int_{\partial\Omega} M_{ij,}\nu_j \varphi_i \, ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{M}}\,\underline{\nu}) \cdot \underline{\varphi} \, ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} M_\nu \varphi_\nu \, ds + \int_{\partial\Omega} M_{\nu s} \varphi_s \, ds.$$

Saamme vaihtoehdot reunaehdoille.

<u>Kinemaattinen</u> tai	<u>luonnollinen.</u>
w	Q_ν
φ_ν	M_ν
φ_s	$M_{\nu s}$.

—

Siis jokaisella reunaosalla annetaan 3 reunaehtoa.

K-malli RM-mallin rajana

Kun kuormitus q skaalataan

$$q = D f \qquad (D \sim t^3) \qquad \text{niin}$$

saadaan Kirchhoff mallille paksuudesta riippumaton ratkaisu:

$$\Delta^2 w = f .$$

Jos merkitään $m_{ij} = M_{ij} / D$

niin RM-mallin energia on

$$\Phi(w, \underline{\theta}) = -\frac{1}{2} \int_\Omega m_{ij}(\underline{\theta})\, \varepsilon_{ij}(\underline{\theta})\, dA$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{Gt}{D} \int_\Omega (w_{,i} - \theta_i)(w_{,i} - \theta_i)\, dA$$

$$- \int_\Omega f\, w\, dA .$$

Tässä

$$\frac{Gt}{D} = \frac{E t}{2(1+\nu)} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{E t^3}$$

$$= \frac{6(1-\nu)}{t^2} \overset{\text{merk.}}{=\!:} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

Leikkaustermin kerroin on siis

verrannollinen t^{-2} joten

äärellinen minimi on olemassa

rajalla $t \to 0$ vain jos Kirchhoff

ehdot toteutuu:

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x = 0 \,, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y = 0 \,.$$

Rajalla $t \to 0$ RM-ratkaisu konvergoi

kohti K-ratkaisua.

Skaalatun mallin heikko muoto

on ngl: Etsi $(w, \underline{\theta}) \in W \times \Theta$

s. että

$$a(\underline{\theta}, \underline{\varphi}) + \frac{1}{\varepsilon^2}(w_{,i} - \theta_i \,,\, v_{,i} - \varphi_i) = (g, v)$$

$$\forall (v, \underline{\varphi}) \in W \times \underline{\Theta} \,.$$

<u>Huom.</u> Ehkä parempi tapa kirjoittaa on

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla w - \underline{\theta} \,,\, \nabla v - \underline{\varphi}) \,.$$

Tehdään näin jatkossa.

Tehtävän energia normi

on

$$|||v,\underline{\varphi}|||_t^2 = \|\underline{\theta}\|_1^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla v - \underline{\varphi}\|_0^2 .$$

Puhdas FE-yritys antaisi menetelmän: Etsi $(w_h, \underline{\theta}_h) \in W_h \times \underline{\Theta}_h$

s.e.

$$a(\underline{\theta}_h,\underline{\varphi}) + \frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla w_h - \underline{\theta}_h, \nabla v - \underline{\varphi}) = (g,v)$$

$$\forall (v,\underline{\varphi}) \in W_h \times \underline{\Theta}_h .$$

Virhe arvio

$$\|\underline{\theta} - \underline{\theta}_h\|_1 + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla(w - w_h) - (\underline{\theta} - \underline{\theta}_h)\|_0$$

$$\leq C \inf_{(v,\underline{\varphi})}\left\{ \|\underline{\theta} - \underline{\varphi}\|_1 + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla(w-v) - (\underline{\theta} - \underline{\varphi})\|_0 \right.$$

Jos käytämme saman asteisia k-nnen asteen polynomeja saadaan arvio:

$$\|\underline{\theta} - \underline{\theta}_h\|_1 + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla(w - w_h) - (\underline{\theta} - \underline{\theta}_h)\|_0$$

$$\leq C h^k \left(\|\underline{\theta}\|_{k+1} + \frac{1}{\varepsilon}\|w\|_{k+1} \right).$$

Palkkien ja laattojen dynamiikka

Hamiltonin periaate kappalesysteemille.

T = liike-energia, V = potentiaalienergia.

$T = T(q_1, \ldots, q_n)$, $V = V(q_1, \ldots, q_n)$,

missä $q_1, \ldots, q_n$ ovat yleistetyt koordinaatit. Lagrangen funktio on $L = T - V$.

Hamiltonin periaatteen mukaan Lagrangen liikeyhtälöt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

antavat funktionaalille

$$\int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$

stationäärin arvon.

Tämä yleistyy kontinuumille jolloin kineettinen ja potentiaalienergia ovat

$$T = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho (\dot{\underline{u}})^2 \, dV$$ ja

$$V = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma_{ij} \, \varepsilon_{ij}(\underline{u}) \, dV - \int_\Omega f_i u_i \, dV$$

$$- \int_{\Gamma_N} g_i u_i \, ds .$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) \, dt$$ saavuttaa

nyt stationääriarvon jokaisen kinemaattisesti luvallisen siirtymän suhteen. Jos kirjoitamme

$$T = \frac{1}{2} c(\dot{\underline{u}}, \dot{\underline{u}})$$ ja

$$V = \frac{1}{2} a(\underline{u}, \underline{u}) - l(\underline{u})$$

niin funktionaali on

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} c(\dot{\underline{u}}, \dot{\underline{u}}) - \frac{1}{2} a(\underline{u}, \underline{u}) + l(\underline{u}) \right] dt$$

ja jatkuvan tehtävän Lagrange liikeyhtälö on Cauchyn liikeyhtälön heikko formulaatio: (Harjoitustehtävä).

Etsi $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$ s.e.

$$c(\ddot{\underline{u}}, \underline{v}) = a(\underline{u}, \underline{v}) - l(\underline{v})$$

jokaiselle kinemaattisesti luvalliselle

$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ testifunktiolle.

$\underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}^0(\underline{x})$ ja $\dot{\underline{u}}(\underline{x}, 0) = \underline{v}(\underline{x})$

ovat annettuja.

Palkkien ja laattojen dynaamiset mallit saadaan helpoiten aloittamalla kirjoittamalla energia käyttäen hyväksi kinemaattisia oletuksia.

Euler - Bernoulli palkki

EB oletuksella siirtymäkentälle saatiin

$$u_1 = -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = w(x,t)$$

missä siis taipuma $w = w(x,t)$ riippuu ajasta.

Kineettinen energia on

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \, dA \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 \right] dA \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^L \int_A z^2 \, dA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \rho I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 dx.$$

missä I on jäyhyysmomentti

$$I = \int_A z^2 \, dA.$$

Kineettisen energian toinen osa edustaa kiertymästä aiheutuvaa energiaa ja EB mallissa sitä ei huomioida, eli

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Niinkuin staattisessa tapauksessa potentiaali energia on

$$\int_0^L \frac{EI}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx - \int_0^L q\, w\, dx .$$

Lagrangen funktio on siis

$$L = \int_0^L \left[\frac{\rho A}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \frac{EI}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + q\, w\right] dx$$

Olkoon η kinemaattisesti

kuvallinen siirtymä $\eta = \eta(x,t)$

jolle pätee $\eta(x, t_1) = \eta(x, t_2) = 0$.

Varioidaan:

$$G(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[\frac{\rho A}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{EI}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^2 + q(w + \varepsilon\eta)\right] dx\, dt$$

$$G'(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[\rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}\right.$$

$$\left. - EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) + q\eta\right] dx\, dt,$$

$G'(0) = 0$ antaa

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[\rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) - EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + q\eta\right] dx\, dt$$

$$= 0 .$$

Termit osittaisintegroidaan seuraavasti

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) dx\,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\eta \, dx\,dt$$

$$+ \Big|_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\eta$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\eta \, dx\,dt .$$

Potentiaalienergialle saadaan niin staattisessa tapauksessa

$$-\int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\,dx$$

$$= -\Big|_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \Big|_0^L EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\eta$$

$$- \int_0^L EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\,dx .$$

Siis kun kaikki yhdistetään

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[-\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + q\right] \eta \; dx\,dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \Big|_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \Big|_0^L EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \eta \, dt .$$

Lopputulos.

Osittais differentiaali yhtälö (hyperboolinen)

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q ,$$

kun $t_1 < t < t_2$, $0 < x < L$.

Alkuehdot: $w(x, 0) = w_0(x)$.

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) .$$

Vaihtoehdot reunoilla $x = 0, L$.

Kinemaattinen   luonnollinen

w = annettu $EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ = annettu

$\frac{\partial w}{\partial x}$ = annettu $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ = annettu .

Vapaan värähtelyn ominaismuodot

ja ominaisarvot saadaan

yritteellä $w(x, t) = \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \{\omega t\} W(x)$

Siis ominaisarvotehtävä

$$EI\, W^{(4)}(X) - \rho A \omega^2 W(X) = 0 .$$

$$0 < X < L .$$

+ luonnolliset / kinemaattiset

reunaehdot.

Timoshenkon palkki

Siirtymät ovat nyt

$$u_1(x,t) = -z\,\theta(x,t)$$

$$u_2(x,t) = 0$$

$$u_3(x,t) = w(x,t)$$

Kineettinen energia, jossa kiertymä nyt huomioidaan, on

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho A\, \dot{u}_i \dot{u}_i \, dA\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho A \left(z^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right) dA\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho \cancel{A} I \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] dx .$$

Potentiaali energia on

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)^2 dx$$

$$-\int_0^L q\,w\,dx.$$

Lagrange funktio $L = T - V$.

Variaatio ja osittais integraointi suoritetaan analogisesti kuin ennen;

$$w + \varepsilon\eta\ ,\quad \theta + \varepsilon\varphi\ ,\quad G(\varepsilon) = \ldots$$

Ehdosta $G'(0) = 0$ saamme

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \Big[\rho A\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t} + \rho AI\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + q\eta$$

$$- EI\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\varphi\right)\Big]dx\,dt$$

$$= 0.$$

Osittaisintegraointi ajan suhteen,

$$\eta(t_i) = 0\quad \varphi(t_i) = 0\ ,\quad i = 1,2,$$

antaa

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \Big[\rho A\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t} + \rho AI\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big]dx\,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \Big[\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\eta + \rho AI\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\Big]dx\,dt.$$

Saamme:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\Big[\int_0^L\Big[-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\eta - \rho A I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\varphi$$

$$+ EI\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\varphi + GA\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\Big)\eta$$

$$+ GA\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\Big)\varphi + q\eta\Big]dx$$

$$+ \Big|_0^L EI\frac{\partial\theta}{\partial x}\varphi - \Big|_0^L GA\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\Big)\eta\Big]dt$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \rho A\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = GA\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\theta\Big)+q, \\ \rho A I\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = EI\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+GA\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\theta\Big), \end{cases}$$

kun $t_1 < t < t_2$, $0 < x < L$.

<u>Alkuehdot</u> $w(x,0) = w_0(x)$,

$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$, $\theta(x,0) = \theta_0(x)$ ja

$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,0) = \vartheta_0(x)$.

<u>Reunaehdot</u> tulevat osittaisintegroinnin sijoitustermeistä:

Kinemaattinen	Luonnollinen
w	$GA\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\Big)$
θ	$EI\frac{\partial\theta}{\partial x}$.

Muistin virhistämiseksi:

$$-EI\frac{\partial\theta}{\partial x} = M = \text{momentti}$$

$$GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right) = Q = \text{Leikkausvoima},$$

Vapaat värähtelyt.

$$(w(x,t),\ \theta(x,t)) = \sin\omega t\,(W(x),\ \Theta(x))$$

Saadaan

$$\begin{cases} GA\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dW}{dx}-\Theta\right) = -\rho A\omega^2 W \\ EI\dfrac{d^2\Theta}{dx^2}+GA\left(\dfrac{dW}{dx}-\Theta\right) = -\rho I\omega^2\Theta. \end{cases}$$

+ Reuna ehdot pisteissä $x = 0, L$.

$$\theta = w'$$

$$EI\,w^{(3)} =$$

Kirchhoff ja Reissner-Mindlin laattamalleille dynaamiset yhtälöt saadaan samalla tavalla (kiertymästä johtuva energia jätetään pois K-mallissa). Tulokset.

Kirchhoff.

$$\rho t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = D\Delta^2 w - q \quad \Omega\text{:ssa}$$
$$t > 0.$$

Alkuehdot

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = v_0(x).$$

Reissner-Mindlin

$$\frac{\rho t^3}{12}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x$$

$$\frac{\rho t^3}{12}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y.$$

$$\rho t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q,$$

missä momentti $\underline{M}$ ja leikkausvoimalle $\underline{Q}$ pätee jo johdetut kaavat.