2.5 Lineaarinen elastisuusteoria

Staattisen elastisuuden yhtälöt olivat:

*) $$\left.\begin{aligned} &\tau_{ij,j} + B_i = 0 \\ &\tau_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij}(\underline{u}) + \lambda\,\mathrm{div}\,\underline{u}\,\delta_{ij} \end{aligned}\right\} \ \Omega\text{:ssa}$$

ja reunaehdot:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \qquad \Gamma_D\text{:llä}$$

$$\underline{\underline{\tau}}\,\underline{\nu} = \underline{t} \qquad \Gamma_N\text{:llä}.$$

Sanomme, että siirtymäkenttä $\underline{v}$ on kinemaattisesti kuvallinen, jos se toteuttaa reunaehdon $\underline{v}\,|_{\Gamma_D} = \underline{u}_0$.

Jännityskenttä $\underline{\underline{\sigma}} = \{\sigma_{ij}\}$ on staattisesti kuvallinen, jos se toteuttaa tasapainoyhtälön

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \qquad \Omega\text{:ssa}$$

ja traktioreunaehdon

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\nu} = \underline{t} \qquad \Gamma_N\text{:llä}.$$

*) Tai yleisemmin

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(\underline{u}).$$

Tehtävän <u>potentiaali energia</u>

on

$$\Phi(\underline{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega c_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}(\underline{u})\,\varepsilon_{kl}(\underline{u})\,dV$$

$$- \int_\Omega \underline{B}\cdot\underline{u}\,dV - \int_{\Gamma_N} \underline{t}\cdot\underline{u}\,dS.$$

Siis muotoa $\frac{1}{2}a(\underline{u},\underline{u}) - l(\underline{u})$, missä

$$a(\underline{u},\underline{v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega c_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}(\underline{u})\,\varepsilon_{kl}(\underline{v})\,dV$$

$$l(\underline{u}) = \int_\Omega \underline{B}\cdot\underline{u}\,dV - \int_{\Gamma_N} \underline{t}\cdot\underline{u}\,dS.$$

Konstitutiivisen mallin (Hooke'n laki) perusteella pätee, että $a(\cdot,\cdot)$ määrittelee normin kun $meas(\Gamma_D) > 0$.

$$a(\underline{v},\underline{v}) \geq C\int_\Omega |\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})|^2\,dV \geq 0$$

ja $= 0$ kun $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) = \underline{\underline{0}}$ eli $\underline{v}$ on jäykän kappaleen siirtymä:

$$\underline{v} = \underline{a} + \underline{b}\times\underline{x}, \quad \underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^3.$$

Kiinnitys Γ_D:llä $\Rightarrow \underline{a} = \underline{b} = \underline{0}$

ns. Kornin epäyhtälön mukaan pätee ($\mathrm{meas}(\Gamma_D) > 0$)

$$\int_\Omega |\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})|^2 \, dV \geq C \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 dV$$

ja edelleen Poincarén epäyhtälön nojalla:

$$\int_\Omega |\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})|^2 dV \geq C' \int_\Omega (|\underline{u}|^2 + |\nabla \underline{u}|^2) dV$$

Hilbert avaruus jossa variaidaan on siis

$$\underline{H}^1_D(\Omega) = \{ \underline{v} \in \underline{H}^1(\Omega) \mid \underline{v}_{|\Gamma_D} = \underline{0} \}.$$

Variaatiotehtävä on siis: etsi

$$\underline{u} \in \underline{H}^1(\Omega) \cap \{ \underline{v} \mid \underline{v}_{|\Gamma_D} = \underline{u}_0 \}$$

siten, että

$$\Phi(\underline{u}) \longrightarrow \min.$$

Variaimalla saadaan "<u>virtuaalisen työn periaate</u>"

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \ell(\underline{v}) \quad \forall \, \underline{v} \in \underline{H}^1_D(\Omega).$$

Alkuhäiriötehtävä: Etsi $\underline{u} = u_i$, $u_i|_{\Gamma_D} = u_{0i}$ ...

$$\int_\Omega C_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}(\underline{u})\, \varepsilon_{kl}(\underline{v})\, dV$$

$$= \int_\Omega B_i v_i\, dV + \int_{\Gamma_N} t_i v_i\, dS.$$

Osittaisintegrointi, jännitystensori,

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\underline{u}),$$

saadaan

$$\int_\Omega C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\underline{u})\, \varepsilon_{ij}(\underline{v})\, dV$$

$$= \int_\Omega \tau_{ij}\, \varepsilon_{ij}(\underline{v})\, dV$$

$$= -\int_\Omega \tau_{ij,j}\, v_i\, dV + \int_{\partial\Omega} \tau_{ij} \nu_j v_i.$$

Euler–Lagrange yhtälöinä saadaan siis tasapainoyhtälö ja voimareunaehto

$$\tau_{ij,j} + B_i = 0 \qquad \Omega\text{:ssa},$$

$$\tau_{ij}\nu_j = t_i \qquad \Gamma_N\text{:llä}.$$

Huom. Notaatiolaiskuussyistä matemaattisessa kirjallisuudessa usein tarkastellaan (yleisyyttä rajoittamatta) tapausta $\underline{u}_0 = \underline{0}$ $\square$

Kaksi muuta variaatioperiaatetta, "komplementaarisen energian minimi" ja Hellinger-Reissner'in periaate saadaan käyttämällä Lagrange kertojia. Tarkastellaan tehtävää

$\Phi(\underline{u}) \rightarrow$ min mutta relaatiot

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \Omega\text{:ssa}$$

ja

$$u_i = u_{0i} \quad \Gamma_0\text{:lla}$$

tulkitaan rajoitusehtoina. Olkoon $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ ja μ_i Lagrange-kertoja funktiot. L-funktionaali on

$$L(\underline{\varepsilon}, \underline{u}; \underline{\lambda}, \underline{\mu})$$

$$= \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} C_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} + \lambda_{ij}\left[\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij}\right] \right\} dV$$

$$- \int_\Omega B_i u_i \, dV - \int_{\Gamma_N} t_i u_i \, dS$$

$$+ \int_{\Gamma_D} \mu_i (u_{0i} - u_i)\, dS .$$

Varioidaan kaikkien neljän muuttujan suhteen

$$\delta L = L(\underline{\varepsilon} + \delta\underline{\varepsilon}, \underline{u} + \delta\underline{u}, \underline{\lambda} + \delta\underline{\lambda}, \underline{\mu} + \delta\underline{\mu}) - L(\ldots)$$

$$= \int_{\Omega} [C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \lambda_{ij}]\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV$$

$$+ \int_{\Omega} \lambda_{ij} [\tfrac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})\, dV - \int_{\Omega} B_i \delta u_i\, dV$$

$$- \int_{\Gamma_N} t_i \delta u_i\, dS + \int_{\Gamma_D} \mu_i \delta u_i\, dS - \int_{\Gamma_D} (u_{0i} - u_i)\, \delta\mu_i\, dS$$

$$+ \int_{\Omega} [\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij}]\, \delta\lambda_{ij}\, dV = 0$$

Saadaan yhtälöt:

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \lambda_{ij} = 0 \quad \Omega\text{:ssa } (\delta\varepsilon_{ij})$$

$$u_{0i} - u_i = 0 \quad \Gamma_D\text{:llä}$$

$$\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} = 0 \quad \Omega\text{:ssa}$$

ja

$$\int_{\Omega} \lambda_{ij} [\tfrac{1}{2}((\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}]\, dV$$

$$- \int_{\Omega} B_i \delta u_i\, dV - \int_{\Gamma_N} t_i \delta u_i\, dS$$

$$+ \int_{\Gamma_D} \mu_i \delta u_i\, dS = 0.$$

osittaisintegroimalla

$$\int_\Omega \lambda_{ij}\left[\frac{1}{2}((\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i})\right] dV$$

$$= -\int_\Omega \lambda_{ij,j}\,\delta u_i\, dV + \int_{\partial\Omega} \lambda_{ij}\,\nu_j\,\delta u_i\, dS .$$

(Huom. δu_i vapaa Γ_D:llä),

josta saadaan

$$\lambda_{ij,j} + B_i = 0 \quad \Omega\text{:ssa}$$

$$\lambda_{ij}\,\nu_j = t_i \quad \Gamma_N\text{:llä}$$

$$\lambda_{ij}\,\nu_j = \mu_i \quad \Gamma_D\text{:llä}.$$

Yhteenvetona: Lagrange kertojafunktio λ_{ij} yhtyy jännitystensoriin τ_{ij} ja μ_i on traktio reunaosalla Γ_D.

Jos esitetään venymät ε_{ij} jännitysten λ_{kl}:n avulla

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\,\lambda_{kl}$$

Niin funktionaali saa muodon

$$\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda_{ij} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right] d \right.$$

$$- \int_\Omega B_i u_i \, dV - \int_{\Gamma_N} t_i u_i \, dS - \int_{\Gamma_D} \mu_i (u_{0i} - u_i) \, dS$$

$$= -\frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_{ij} \varepsilon_{ij} \, dV + \int_\Omega \lambda_{ij} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV$$

$$- \int_\Omega B_i u_i \, dV - \int_{\Gamma_N} t_i u_i \, dS - \int_{\Gamma_D} \mu_i (u_{0i} - u_i) \, d$$

$$= -\frac{1}{2} \int_\Omega a_{ijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \, dV$$

$$- \int_\Omega \lambda_{ij,j} u_i \, dV + \int_{\partial\Omega} \lambda_{ij} \nu_j u_i \, dS$$

$$- \int_\Omega B_i u_i \, dV - \int_{\Gamma_N} t_i u_i \, dS - \int_{\Gamma_D} \mu_i (u_{0i} - u_i) \, dS$$

Jännitystensori on staattisesti luvallinen : $\lambda_{ij,j} + B_i = 0$,

$\lambda_{ij} \nu_j = t_i$

Niin saadaan funktionaali

$$-\Psi(\lambda) = \frac{1}{2} \int_\Omega a_{ijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \, dV$$

$$- \int_{\Gamma_D} u_{0i} \lambda_{ij} \nu_j \, dS$$

Tämä kutsutaan "komplementaari-sekä energiaksi".

$$\Psi(\underline{\tau}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_{ijkl}\,\tau_{ij}\tau_{kl} - \int_{\Gamma_D} u_{0i}\,\tau_{ij}\,\nu_j\, dS$$

Lause. Olkoon $\underline{v}$ kinemaattisesti luvallinen siirtymä ja $\underline{\sigma}$ staattisesti luvallinen jännitys. Pätee

$$\Phi(\underline{v}) + \Psi(\underline{\sigma}) \geq 0 .$$

Yhtäläisyys pätee ainoastaan elastisuustehtävän ratkaisulle $\underline{u}$, $\underline{\tau}$.

Todistus. Koska

$$\Phi(\underline{v}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} c_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}(\underline{v})\,\varepsilon_{kl}(\underline{v})\, dV$$

$$- \int_{\Omega} \underline{B}\cdot\underline{v}\, dV - \int_{\Gamma_N} \underline{t}\cdot\underline{v}\, dS ,$$

Merkitään $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\underline{v})$ ja

$$\varepsilon'_{ij} = a_{ijkl}\,\sigma_{kl}$$

Saadaan

$$0 \le \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij})(\varepsilon_{kl} - \varepsilon'_{kl})\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl}\,dV - \int_\Omega C_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon'_{kl}\,dV$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\,\varepsilon'_{kl}\,\varepsilon'_{ij}\,dV =$$

$$\Phi(v) + \int_\Omega \underline{B}\cdot\underline{v}\,dV + \int_{\Gamma_N} \underline{t}\cdot\underline{v}\,dV$$

$$- \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\underline{v})\,\sigma_{ij}\,dV + \psi(\underline{\underline{\sigma}}) + \int_{\Gamma_D} \underline{u}_0\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\nu}\,d$$

Keskimmäinen termi:

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(\underline{v})\,\sigma_{ij}\,dV$$

$$= -\int_\Omega v_i\,\sigma_{ij,j}\,dV + \int_{\partial\Omega} v_i\,\sigma_{ij}\,\nu_j\,dS$$

$$= -\int_\Omega v_i\,B_i\,dV + \int_{\Gamma_D} u_{0i}\,\sigma_{ij}\,\nu_j\,dS$$

$$+ \int_{\Gamma_N} v_i\,t_i\,dS.$$

$\Longrightarrow$ Väite. $\square$.

Seuraus lause Komplementaarinen energia saavuttaa minimiarvonsa staattisesti luvallisten jännitysten joukossa "oikealla" jännityksellä, eli on olemassa kinemaattisesti luvallinen siirtymä $\underline{u}$ s.e. $\tau_{ij} = c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(\underline{u})$

Hellinger-Reissner'in periaate.

Tämän päädytään kun edellisestä Lagrange funktionaalista eliminoidaan $\underline{\mu}$ ja $\underline{\varepsilon}$ käyttäen yhtälöitä ($\lambda_{ij} = \tau_{ij}$)

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\,\tau_{kl}.$$

$$\mu_i = \tau_{ij}\,\nu_j.$$

Hellinger-Reissner funktionaali on nyt

$H(\underline{\tau}, \underline{u})$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijkl}\,\tau_{ij}\,\tau_{kl}\,dV$$

$$+ \int_\Omega \tau_{ij}\left(\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - a_{ijkl}\,\tau_{kl}\right) dV$$

$$+ \int_\Omega B_i u_i\,dV - \int_{\Gamma_N} t_i u_i\,dS$$

$$- \int_{\Gamma_D} \tau_{ij}\,\nu_j\,(u_{0i} - u_i)\,dS.$$

Siis

$$H(\underline{\tau}, \underline{u}) = -\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijkl}\tau_{ij}\tau_{kl}\,dV$$

$$+\int_\Omega \tau_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\underline{u})\,dV - \int_\Omega B_i u_i\,dV$$

$$-\int_{\Gamma_N} t_i u_i\,dS - \int_{\Gamma_D} \tau_{ij}\nu_j(u_{0i}-u_i)\,dS.$$

Variointi antaa yhtälöt: Etsi τ_{ij} ja u_i s.e.

$$\int_\Omega \left[a_{ijkl}\tau_{kl} - \varepsilon_{ij}(\underline{u})\right]\sigma_{kl}\,dV$$

$$= \int_{\Gamma_D}(u_{0i}-u_i)\,\sigma_{ij}\nu_j\,dS$$

$$\int_\Omega \left[\tau_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\underline{v}) - B_i v_i\right]dV$$

$$= \int_{\Gamma_N} t_i v_i\,dS$$

jokaiselle $\underline{v}$ ja $\underline{\sigma}$.

Differentiaaliyhtälöt reunaehtoineen ovat

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\underline{u}) - a_{ijkl}\tau_{kl} &= 0, \\ \tau_{ij,j} + B_i &= 0, \end{aligned}\right\} \;\Omega\text{:ssa}$$

$$u_i = u_{0i}, \quad \Gamma_D\text{:llä}$$

$$\tau_{ij}\nu_j = t_i \quad \Gamma_N\text{:llä}.$$

Merkitään Potentiaalienergian antama energianormi $\underline{H}^1_D(\Omega)$:ssa

$$|||\underline{v}|||^2 = \int_\Omega c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(\underline{v})\,\varepsilon_{ij}(\underline{v})\,dV.$$

Komplementaarisen energian normi $\underline{L}^2(\Omega)$:ssa merkitään

$$\|\underline{\sigma}\|_c^2 = \int_\Omega a_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\,dV$$

Lause. Olkoon $\underline{u}$ lin. elastisuustehtävän ratkaisu ja $\underline{v} \in \underline{H}^1(\Omega)$ mielivaltainen kinemaattisesti luvallinen siirtymä. Tällöin pätee

$$\frac{1}{2}|||\underline{u}-\underline{v}|||^2 = \Phi(\underline{v}) - \Phi(\underline{u}).$$

Todistus. Eulerin yhtälön perusteella pätee

$$a(\underline{u}, \underline{u}-\underline{v}) = l(\underline{u}-\underline{v}).$$

Toisaalta

$$\Phi(\underline{v}) - \Phi(\underline{u}) = \frac{1}{2}a(\underline{v},\underline{v}) - l(\underline{v})$$

$$-\frac{1}{2}a(\underline{u},\underline{u}) + l(\underline{u})$$

$$= \frac{1}{2}a(\underline{v},\underline{v}) + l(\underline{u}-\underline{v}) - \frac{1}{2}a(\underline{u},\underline{u}).$$

$$= \frac{1}{2}a(\underline{v},\underline{v}) + a(\underline{u},\underline{u}-\underline{v}) - \frac{1}{2}a(\underline{u},\underline{u})$$

$$= \frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) + a(\underline{u}, \underline{u}) - a(\underline{u}, \underline{v})$$

$$- \frac{1}{2} a(\underline{u}, \underline{u})$$

$$= \frac{1}{2} \left[a(\underline{u}, \underline{u}) - 2a(\underline{u}, \underline{v}) + a(\underline{v}, \underline{v}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} ||| \underline{u} - \underline{v} |||^2 .$$

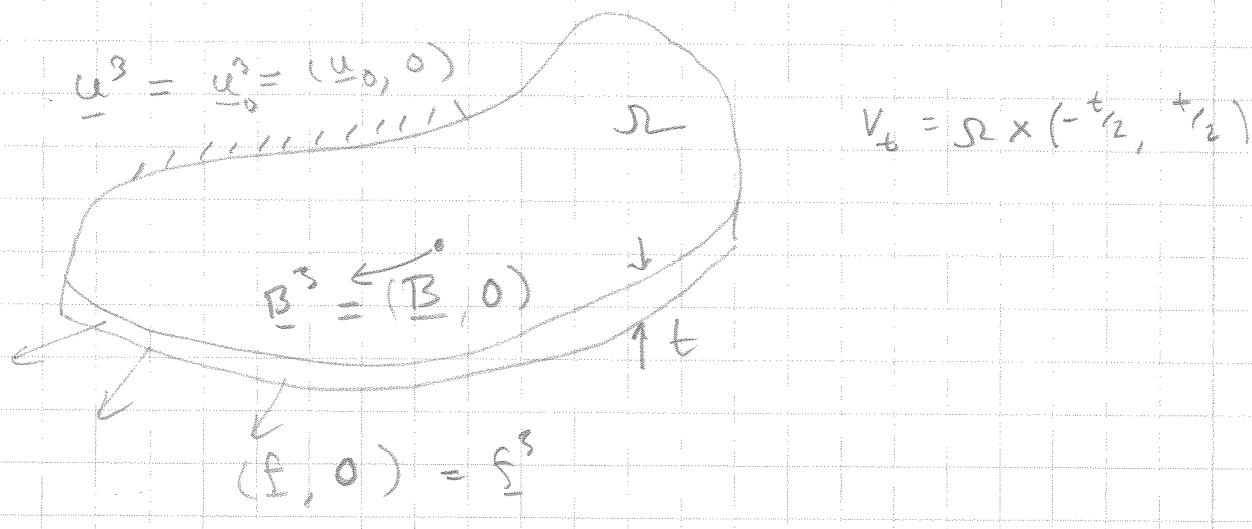
Samoin saadaan (tod. harj. tehtävänä).

Lause. Olkoon jännitys $\underline{\tau}$ elastisuustehtävän ratkaisu ja $\underline{\sigma}$ mielivaltainen staattisesti luvallinen jännitys. Pätee

$$\frac{1}{2} \| \underline{\tau} - \underline{\sigma} \|_c^2 = \psi(\underline{\sigma}) - \psi(\underline{\tau}). \qquad \square$$

Seuraavaksi käytämme energia lauseita todistaaksemme, että 3D elastisuustehtävä ratkaisu suppenee kohti levy (taso-jännitys) ratkaisua kun levyn paksuus $t \to 0$.

Oletetaan siis, että 3D kappale on $\Omega \times [0, t]$,



Tasojännitystila olettaa $\tau_{i3} = 0$, $i = 1,2,3$. Kun on tarve erotella 2D ja 3D tensoria kirjoitetaan $\underline{\tau}^2$ ja $\underline{\tau}^3$. Olkoon $\underline{u}^2$ tasojännitystilaa vastaavan siirtymä:

$\underline{u}^2 = (u_1, u_2)$. Vastaava venymä on $\underline{\varepsilon}^2$ siis

$$\varepsilon^2_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i,j = 1,2.$$

Hooken lain mukaan (kts. sivu 53) $u_3 \neq 0$.

Lähde: D. Morgenstern & I. Szabó. Vorlesungen über Theoretische Mechanik, Springer. siv. 120 — ...

Tasovenymätilassa jännitys–venymäyhteys on (karjaitensteltävä)

$$\tau^2_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\underline{u}^2) + \lambda^* \varepsilon_{kk}(\underline{u}^2)\, \delta_{ij}, \; ij=1,2$$

missä

$$\lambda^* = \left(\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\right).$$

Merkitään 3-dim. energiaa ja komplementaarienergiaa alaindeksillä 3, ja levyn aluetta V_t:llä:

$$V_t = \Omega \times (-\ell/2, \ell/2).$$

$$\Phi_3(\underline{u}^3) = \frac{1}{2}\int_{V_t} \{2\mu\, \varepsilon_{ij}(\underline{u}^3)\varepsilon_{ij}(\underline{u}^3) + \lambda(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3)))^2\}\, dV_t$$

$$- \int_{V_t} \underline{B}^3 \cdot \underline{u}^3\, dV - \int_{\Gamma_N^t} \underline{f}^3 \cdot \underline{u}^3\, dS_t,$$

$$\Psi_3(\underline{\underline{\tau}}^3) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\tau^3_{ij}\tau^3_{ij} - \nu(\tau^3_{kk})^2\right\} dV_t$$

$$- \int_{\Gamma_D^t} \underline{u}_0^3\, \underline{\underline{\tau}}^3 \cdot \underline{\nu}\, dS_t,$$

missä Γ_D^t ja Γ_N^t ovat ne ∂V_t osat jossa siirtymä ja traktio on annettu.

2-ulotteiselle tasojännitys-tehtävälle energiat ovat

$$\Psi_2(\underline{\underline{\tau}}^2) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\,\tau^2_{ij}\,\tau^2_{ij} - \nu\,(\tau^2_{kk})^2\right\} dA$$

$$- \int_{\Gamma_D} \underline{u}^2_0 \cdot \underline{\underline{\tau}}^2\,\underline{\nu}\; ds$$

ja

$$\Phi_2(\underline{u}^2) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{2\mu\,\varepsilon_{ij}(\underline{u}^2)\,\varepsilon_{ij}(\underline{u}^2) + \lambda^*\left(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2(\underline{u}^2))\right)^2\right\} dA$$

$$- \int_\Omega \underline{B}\cdot\underline{u}^2\, dA - \int_{\Gamma_N} \underline{f}^2 \cdot \underline{u}^2\, ds,$$

missä Γ_D, Γ_N ovat $\partial\Omega$:n osat jossa siirtymä ja traktio on annettu.

<u>Huom:</u> Tasojännitystilassa pätee $\tau_{33} = 0$ josta

$$0 = 2\mu\,\varepsilon_{33} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,,$$

$$\Rightarrow \quad (2\mu+\lambda)\,\varepsilon_{33} = -\lambda\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

ja

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{(2\mu+\lambda)}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}).$$

Näin ollen on luonnollista tehdä seuraava yrite

$$u_3 = x_3 \, w(x_1, x_2).$$

Olkoon $\underline{\underline{\tau}}^t$ ja $\underline{u}^t$ todellinen ratkaisu V_t:ssä. Tavoitteena on osoittaa, että $\underline{\underline{\tau}}^3$ ja $\underline{\underline{\tau}}^t$ suppenevat kohti toisiaan kun $t \to 0$.

Pätee

$$\psi_3(\underline{\underline{\tau}}^3) = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_{\Omega} a_{ijkl} \, \tau^3_{ij} \, \tau^3_{kl} \, dA \, dx_3$$

$$- \int_{\Gamma^t_D} \underline{u}^3 \cdot (\underline{\underline{\tau}}^3 \cdot \underline{\nu}) \, dS_t$$

$$= t \int_{\Omega} a_{ijkl} \, \tau^2_{ij} \, \tau^2_{kl} \, dA$$

$$- t \int_{\Gamma_D} \underline{u}^2_0 \, \underline{\underline{\tau}}^2 \cdot \underline{\nu} \, dS$$

$$= t \, \psi_2(\underline{\underline{\tau}}^2).$$

Tiedämme, että tarkka $\underline{\underline{\tau}}^t$ toteuttaa

$$\psi_3(\underline{\underline{\tau}}^t) \leq \psi_3(\underline{\underline{\tau}}^3)$$

josta siis

$$\frac{1}{t}\,\Psi_3(\underline{\underline{\tau}}^t) \le \Psi_2(\underline{\underline{\tau}}^2) \,. \qquad (*)$$

Lisäksi pätee

$$\Psi_3(\underline{\underline{\tau}}^t) = -\,\Phi_3(\underline{u}^t) \,. \qquad (**)$$

u_3 - yritteelle saamme

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\underline{\underline{\varepsilon}}^2(\underline{u}^2)$}} & \frac{1}{2}x_3\frac{\partial w}{\partial x_1} \\ & & \frac{1}{2}x_3\frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \hline \frac{1}{2}x_3\frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{1}{2}x_3\frac{\partial w}{\partial x_2} & w \end{array}\right),$$

ja

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^3 : \underline{\underline{\varepsilon}}^3 = \underline{\underline{\varepsilon}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 + \frac{1}{2}x_3^2\,|\nabla w|^2 + w^2 ,$$

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^3) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + w \,.$$

Saamme

$$\Phi_3(\underline{u}^3) = \frac{1}{2}\int_{V_t}\Big\{2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3) : \underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3)$$

$$+\lambda\big[\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3))\big]^2\Big\}\,dV_t$$

$$-\int_{\Gamma_N^t}\underline{f}^3\cdot\underline{u}^3\,dS \,.$$

Pätee

$$\int_{\Gamma_D^t} \underline{f}^3 \cdot \underline{u}^3 \, ds = t \int_{\Gamma_D} \underline{f}^2 \cdot \underline{u}^2 \, ds$$

ja

$$\int_{V_t} \{ 2\mu \, \underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3) : \underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3) + \lambda [tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^3(\underline{u}^3))]\}^2 \, dV_t$$

$$= \int_{-t/2}^{t/2} \int_{\Omega} \{ 2\mu (\underline{\underline{\varepsilon}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 + \frac{1}{2} x_3^2 |\nabla w|^2 + w^2)$$

$$+ \lambda (tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + w)^2 \} \, dA \, dt .$$

$$t \int_{\Omega} [2\mu (\underline{\underline{\varepsilon}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 + \frac{t^2}{24} |\nabla w|^2 + w^2)$$

$$+ \lambda (tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + w)^2 \, dA .$$

Valitaan nyt w siten, että

$$2\mu \, w^2 + \lambda (tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + w)^2 \to \min$$

saadaan ehto

$$2\mu \cdot 2w + 2\lambda (tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + w) = 0$$

eli

$$w = - \left(\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \right) tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) .$$

Tästä taas saadaan

$$2\mu\, w^2 + \lambda\,(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + w)^2$$

$$= (\text{sijoita \& laske}) \ldots = \left(\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\right)(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2))^2$$

$$= \lambda^* \,[\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2)]^2 .$$

Siis yhteen koottuna

$$\frac{1}{t}\,\Phi_3(\underline{u}^3) = \Phi_2(\underline{u}^2) + \frac{\mu t^2}{24}\int_\Omega |\nabla w|^2\, dA$$

$$= \Phi_2(\underline{u}^2) + O(t^2) \qquad (\ast\ast\ast)$$

Yhdistämällä $(\ast)$, $(\ast\ast)$ & $(\ast\ast\ast)$ saadaan

$$\Phi_2(\underline{u}^2) = -\Psi_2(\underline{\tau}^2) \le -\frac{1}{t}\Psi_3(\underline{\tau}^t)$$

$$= \frac{1}{t}\Phi_3(\underline{u}^t) \le \frac{1}{t}\Phi_3(\underline{u}^3) = \Phi_2(\underline{u}^2) + O(t^2).$$

Kun $t \to 0$ pätee siis

$$\frac{1}{t}\Phi_3(\underline{u}^t) \to \Phi_2(\underline{u}^2) \quad \text{ja} \quad \frac{1}{t}\Phi_3(\underline{u}^3) \to \Phi_2(\underline{u}^2)$$

Olkoon $|||\cdot|||$ 3D energianormi. Nyt saadaan

$$\frac{1}{t}\,|||\underline{u}^t - \underline{u}^3|||^2 = \frac{1}{t}\left(\Phi_3(\underline{u}^t) - \Phi_3(\underline{u}^3)\right)$$

$$\longrightarrow 0$$

$\square$