Mat-1.187 Dynaamisten systeemien erikoiskurssi Eirola/S. Hyvönen K2000

1. Laskuharjoitus (pe 28.1. U322 (huom. muuttunut sali!))

1. Etsi 1-dimensioinen dynaaminen systeemi $x^{k+1} = \phi(x^k)$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ ja

   (a) origo on epästabiili

   (b) origo on asymptoottisesti stabiili tasapainotila.

   Tarkastele vielä tapausta $\phi'(0) = -1$.

2. Olkoon

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \alpha x_2 + x_1^2 \\ -x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}$$

   Millä α:n arvoilla origo on systeemin $x^{k+1} = \phi(x^k)$ stabiili tasapainotila?

3. Todista Gronwallin lemma: Olkoon $C \geq 0$, $K \geq 0$ ja olkoon $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ jatkuva ei-negatiivinen funktio jolle pätee kaikilla $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq C + \int_0^t [Ku(s) + b(s)]ds.$$

   Tällöin kaikilla $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq Ce^{Kt} + \int_0^t [e^{K(t-s)}b(s)]ds.$$

4. Kun systeemi riippuu parametrista $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = f(x(t), \alpha), \quad x(0) = u,$$

   silloin myös virtaus on α:n funktio: $x(t) = \phi^t(u, \alpha)$. Osoita että $\frac{\partial}{\partial\alpha}\phi^t(u, \alpha)$:lle pätee

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_\alpha^t(u, \alpha) &= f_x(\phi^t(u, \alpha), \alpha)\phi_\alpha^t(u, \alpha) + f_\alpha(\phi^t(u, \alpha), \alpha), \\ \phi_\alpha^0(u, \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

   jonka ratkaisu voidaan kirjoittaa (näytä!)

$$\phi_\alpha^t(u, \alpha) = \int_0^t \phi_u^t(u, \alpha)\phi_u^s(u, \alpha)^{-1} f_\alpha(\phi^s(u, \alpha), \alpha)ds.$$

5. Osoita että ratkaisun differentioituuvuus alkuarvon suhteen ja yhtälön parametrien suhteen ovat käytännöllisesti katsoen ekvivalentit onglemat. (Vihje: kirjoita $x' = f(x, \alpha)$, lisää yhtälö $\alpha' = 0$).

6. Luennolla näytettiin: $f \in C_{\mathrm{Lip}}^{0,1} \Rightarrow \psi \in C^{1,1}$. Miten tästä saadaan $f \in C_{\mathrm{Lip}}^{0,k} \Rightarrow \psi \in C^{1,k}$?