Aalto-universitetet

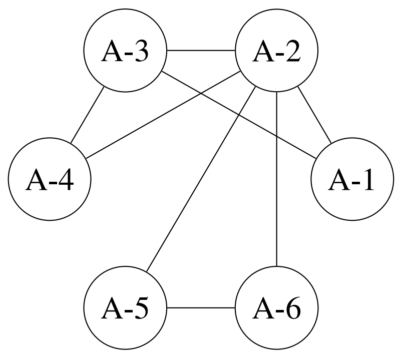
MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik Gripenberg
Övning 6
Vecka 42, 16.10–18.10.2013
Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 15,16, 17

I1. Antag att ett antal studerande skall delta i tenter i kurserna A-1,..., A-6 enligt följande:

Stud. 1	A-2	A-4	
Stud. 2	A-1	A-2	A-3
Stud. 3	A-3	A-4	
Stud. 4	A-2	A-5	A-6

Rita en graf med noder A-j så att det finns en båge mella A-j och A-k om och endast om det finns åtmintone en studerande som skall delta i tenten i både A-j och A-k. Bestäm det kromatiska talet för grafen, dvs. det minsta antal färger med vilka noderna kan färgas så att två noder mellan vilka det finns en båge har olika färger. Vad säger detta tal?

Lösning: Grafen ser ut tex. såhär:



Eftersom det finns cyklar med längden 3 behövs det minst 3 färger, men att det också är möjligt att färga noderna med tre färger tex. a, b och c ser man av att följande funktion f (som man kan konstruera med den giriga färgningsalgoritmen) är en färgning:

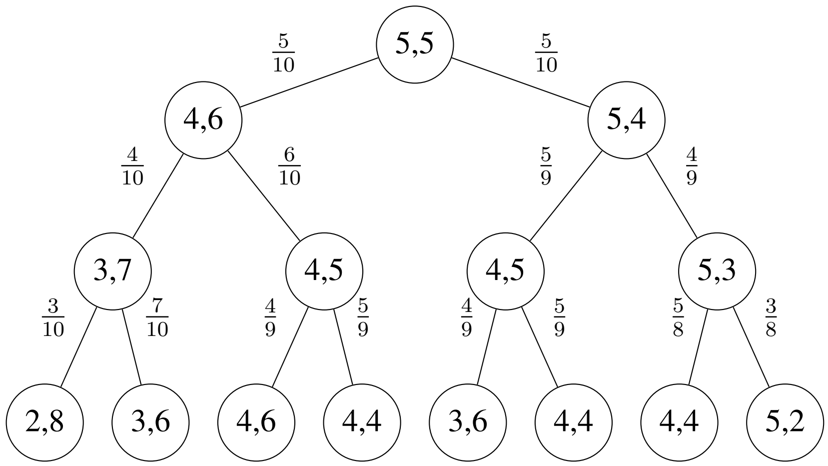
$$f(1) = a \qquad f(2) = b \qquad f(3) = c$$
$$f(4) = a \qquad f(5) = a \qquad f(6) = c.$$

Det kromatiska talet är alltså 3 och det innebär att åtminstone 3 skilda tidpunkter bör reserveras för tenterna så att alla kan delta i tenterna för sina kurser.

I2. I en låda finns till en början 5 vita och 5 svarta bollar. Man plockar slumpmässigt en boll ur lådan och om den är vit lägger man en svart boll i lådan (den vita läggs alltså inte tillbaka) och om den är svart lägger man ingen boll tillbaka i lådan. Detta görs ytterligare två gånger. Rita ett träd som beskriver denna procedur och ge bågarna en vikt som är sannolikheten ($\frac{a}{a+b}$ eller $\frac{b}{a+b}$ om a är antalet vita och b antalet svarta bollar) för just det fallet. Skriv i noderna antalet svarta och antalet vita bollar. Beräkna sannolikheten för att det till slut (efter att man alltså plockat och eventuellt satt tillbaka en boll tre gånger) finns 6 svarta bollar i lådan. Sannolikheten fås genom att multiplicera vikterna för bågarna från startnoden till varje slutnod med 6 svarta bollar, och sedan addera dessa sannolikheter.

Svar: $\frac{1607}{4050} \approx 0.4$

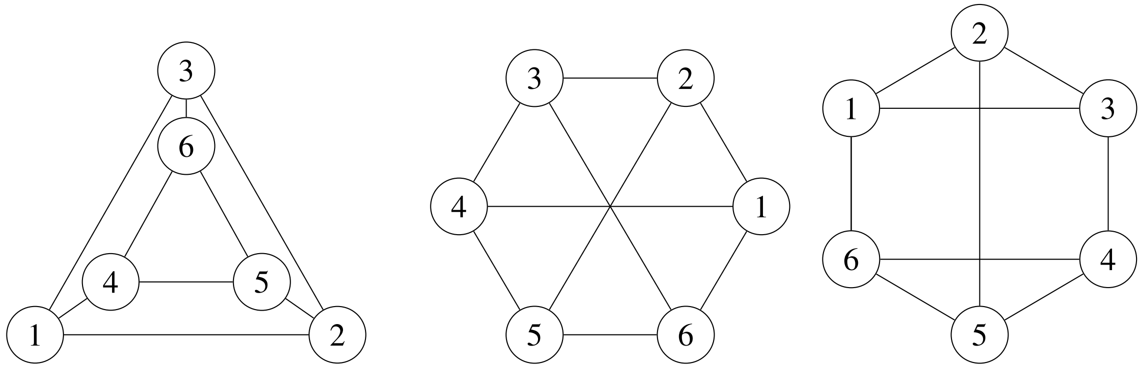
Lösning: Vi ritar trädet så att bågen neråt till vänster väljs om man plockar en vit boll och bågen neråt till höger om man plockar en svart. Resultatet blir följande:



Vi ser att i tre av de 8 fallen finns det 6 svarta bollar i lådan och sannolikheterna för de olika fallen är

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{50}$$
$$\frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{15}$$
$$\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{10}{81}$$
$$\text{Sammanlagt:} \quad \frac{1607}{4050} \approx 0.4.$$

I3. Två grafer $[V, E]$ och $[V', E']$ är isomorfa (dvs. det är frågan om "samma" graf) om det finns en bijektion $f : V \to V'$ så att det finns en båge i V mellan noderna a och $b \in V$ om och endast om det finns en båge i V' mellan $f(a)$ och $f(b)$. Vilka av följande grafer är isomorfa och vilka är inte det? Motivera ditt svar och ge bijektionen i det fall att två grafer är isomorfa.



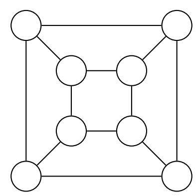
(a) (b) (c)

Lösning: Grafen (b) är inte isomorf med (a) eller med (c) eftersom det i både (a) och (b) finns cyklar (eller kretsar) med tre noder medan några sådana inte finns i grafen (b).

Däremot är graferna (a) och (c) isomorfa och en isomorfism är tex. funktionen definierad på noderna i (a) med

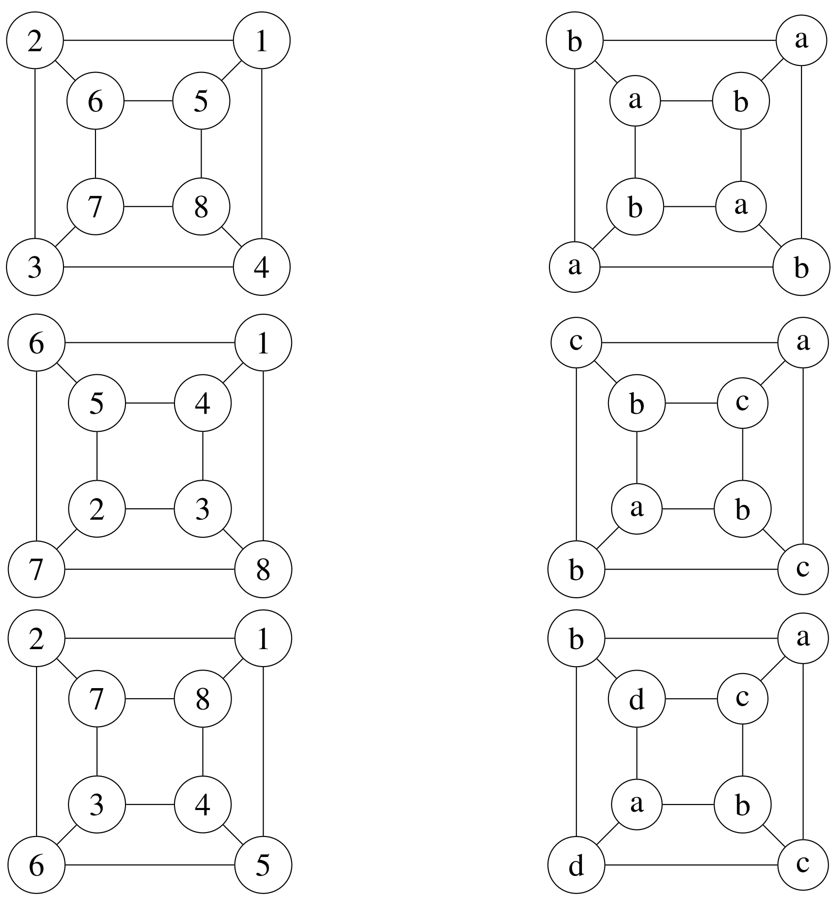
$$f(1) = 1, \qquad f(2) = 2, \qquad f(3) = 3$$
$$f(4) = 6, \qquad f(5) = 5, \qquad f(6) = 4.$$

I4. Ordna noderna (dvs. numrera dem) i ”kub-grafen”



på tre olika sätt så att den giriga algortimen för att färga noderna kräver 2, 3 och 4 färger.

Lösning: Om man går genom noderna i ordningen $1, 2, 3, \ldots, 8$ enligt grafen till vänster så blir färgningen den till höger i följande tre fall.



I5. Antag att det i en icke-riktad graf inte finns några bågar från någon nod till den själv (dvs. det är frågan om en sk. enkel graf). Antag också att det finns en nod med ett udda antal grannar. Beskriv en algoritm som ger en väg från denna nod till en annan nod med med ett udda antal grannar och förklara varför den fungerar.

Lösning: Vi kan använda följande algortim för att välja en väg med de önskade egenskaperna: Antag att man redan konstruerat vägen $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ där v_0 är den givna noden med ett udda antal grannar så att $\{v_{j-1}, v_j\} \neq \{v_{k-1}, v_k\}$ då $1 \leq j < k \leq n$, dvs. inga bågar upprepas. (För $n = 1$ är detta säkert möjligt.) Om $v_n \neq v_0$ och v_n har ett udda antal grannar så har vi hittat en sådan nod som söks. Om vi kan visa att v_n har en granne v_{n+1} så att $\{v_n, v_{n+1}\} \notin \{\, \{v_{j-1}, v_j\} : j = 1, \ldots, n\,\}$ så kan vi bilda den nya vägen $(v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ med samma egenskap och eftersom ingen båge upprepas och vi antar att det finns ändligt många bågar tar processen i något skede slut.

För att visa att v_n har en granne v_{n+1} så att $\{v_n, v_{n+1}\} \notin \{\, \{v_{j-1}, v_j\} : j = 1, \ldots, n\,\}$ så kan vi låta $J = \{\, 0 \leq j \leq n-1 : v_j = v_n \,\}$ och vi kan genast konstatera att $n - 1 \notin J$. Om nu $v_n \neq v_0$ så finns det ett udda antal bågar i mängden $\{\, \{v_{j-1}, v_j\} : j \in J\,\} \cup \{\, \{v_j, v_{j+1}\} : j \in J\,\} \cup \{\{v_{n-1}, v_n\}\}$ och eftersom v_n antas ha ett jämnt antal grannar så kan vi hitta en granne v_{n+1} så att $\{v_n, v_{n+1}\} \notin \{\, \{v_{j-1}, v_j\} : j = 1, \ldots, n\,\}$. Om igen $v_n = v_0$ så är $v_1 \neq v_n$ och det finns ett jämnt antal bågar i mängden $\{\{v_0, v_1\}\} \cup \{\, \{v_{j-1}, v_j\} : j \in J, j > 1\,\} \cup \{\, \{v_j, v_{j+1}\} : j \in J, j > 1\,\} \cup \{\{v_{n-1}, v_n\}\}$ och eftersom $v_n = v_0$ antas ha ett udda antal grannar så kan vi hitta en granne v_{n+1} så att $\{v_n, v_{n+1}\} \notin \{\, \{v_{j-1}, v_j\} : j = 1, \ldots, n\,\}$.
