Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik — Gripenberg
Övning 3
Vecka 39, 25–28.9.2013
Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs 10, 11, 12

I1. En förening har en styrelse som består av sju personer, A, B, C, D, E, F och G. Inom styrelsen skall utses en ordförande, sekreterare och kassör så att ingen har mera än en uppgift.

(a) På hur många sätt kan detta göras om antingen C eller D skall vara ordförande?
(b) På hur många sätt kan detta göras om A skall få en av befattningarna?

Ledning: Dela upp problemet i flera delar av typen "välj r element från en mängd med n element".

Svar: (a) 60, (b) 90

Lösning: (a) Om C väljs till ordförande så skall vi välja två av 6 återstående medlemmarna till sekreterare och kassör och detta kan göras på $6 \cdot 5 = 30$ olika sätt eftersom uppgifterna är olika. Lika många alternativ uppstår för det fall att D väljs till ordförande så det finns sammanlagt 60 olika sätt att göra valen.

(b) I dethär fallet blir det tre olika situationer beroende på vilket uppdrag A får. Men i alla fallen skall vi välja två medelemmar bland de återstående 6 för att sköta de andra uppgifterna och detta kan igen göras på $6 \cdot 5 = 30$ olika sätt så det sammanlagda antalet alternativ blir 90.

I2. En låda innehåller 7 blåa, 6 gula, 5 röda och 2 gröna bollar. På hur många sätt kan man välja 4 bollar ur lådan (utan att ordna dem på något sätt) då man endast kan skilja på bollar med olika färg?

Ledning: Observera att vi inte kan välja flera än 2 gröna bollar så även om detta är ett val med upprepning så finns det en begränsning här!

Svar: 31

Lösning: Om man skall välja r föremål med upprepningar bland n olika slags föremål kan detta som bekant göras på $\binom{n+r-1}{r}$ olika sätt. Men på grund av begränsningen att vi kan välja högst 2 gröna bollar så är det kanske enklast att behandla fallen då man valt 0, 1 eller 2 gröna bollar skilt (och dessa fall utesluter ju varandra.

Om man väljer j gröna bollar återstår att välja $4 - j$ bollar bland de 3 återstående färgerna och detta kan göras på $\binom{3+4-j-1}{4-j}$ olika sätt. Det sammanlagda antalet alternativ blir därför

$$\binom{3+4-0-1}{4-0} + \binom{3+4-1-1}{4-1} + \binom{3+4-2-1}{4-2}$$
$$= \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} = \frac{30}{2} + \frac{20}{2} + \frac{12}{2} = 31.$$

I3.

(a) På hur många sätt kan man ordna talen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ och 9 om man kräver att alla udda tal skall komma direkt efter varandra?

(b) På hur många sätt kan man ordna talen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ och 8 om man kräver att inget udda tal kommer direkt efter ett annat udda tal?

Svar: (a) 14400, (b) 2880

Lösning: (a) Det finns 4 jämna tal och 5 udda. De jämna talen kan ordnas på $4!$ olika sätt och de udda på $5!$ olika sätt. Dessutom skall följden av udda tal sättas in bland de jämna talen och det finns 5 ställen att göra detta (före alla, efter det första, osv.). Detta innebär att det totala antalet alternativ blir

$$4! \cdot 5! \cdot 5 = 14400.$$

(b) Mellan de udda talen måste det finnas ett jämnt tal och det behövs tre stycken för detta. Det fjärde jämna talet kan då placeras antingen först eller sist eller mellan några udda tal så att där blir två jämna. Detta ger 5 olika möjligheter. Både de udda och de jämna talen kan ordnas, oberoende av varandra, på $4!$ olika sätt. Det sammanlagda antalet alternativ blir därför enligt produktprincipen

$$5 \cdot 4! \cdot 4! = 2880.$$

I4. Antag att du har en funktion f som räknar ut binomialkoefficienten så att $f(m, n) = \binom{m}{n}$. (I `matlab/octave` kallas denna funktion `nchoosek` eller `bincoeff`.) Skriv ett (enkelt ?) uttryck med hjälp av denna funktion f som ger multinomialkoefficienten

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

där $n_1 + \ldots n_k = n$ (och där $n_1, n_2, \ldots, n_k$ är icke-negativa heltal).

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} &f(n, n_1) \cdot f(n - n_1, n_2) \cdot f(n - n_1 - n_2, n_3) \cdot \ldots \cdot f(n - n_1 - \ldots - n_{k-2}, n_{k-1}) \\ &\quad = \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdot \frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3!(n - n_1 - n_2 - n_3)!} \cdot \\ &\qquad \ldots \cdot \frac{(n - n_1 - \ldots - n_{k-2})!}{n_{k-1}!(n - n_1 - \ldots - n_{k-2} - n_{k-1})!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}, \end{aligned}$$

eftersom $n - n_1 - \ldots - n_{k-2} - n_{k-1} = n_k$.

I5. Anta att det finns en bijektion, som därmed också är en surjektion, från $\mathbb{N}_0$ till $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ (dvs. till mängden av alla funktioner från N_0 till $\{0, 1\}$). Visa att detta leder till en motsägelse genom att konstruera en funktion i $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ som inte hör till $g(\mathbb{N}_0)$.

Ledning: För varje $n \in \mathbb{N}_0$ är $g(n)$ en funktion $\mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ dvs. $g(n)(j) \in \{0, 1\}$ för alla $j \geq 0$. Använd talen $g(n)(n)$ i din konstruktion!

Lösning: Vi definierar funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ med

$$f(n) = 1 - g(n)(n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Antag nu att $f \in g(N_0)$, dvs. det finns något tal m så att $g(m) = f$. Då är $g(m)(m) = f(m)$ men enligt definitionen är $f(m) = 1 - g(m)(m)$ så att $g(m)(m) = \frac{1}{2}$ vilket är omöjligt eftersom $g(m)(m) \in \{0, 1\}$.