Johdatus solmuteoriaan

Pekka Alestalo

8. toukokuuta 2002

Sisältö

Johdanto

Matemaattinen solmuteoria sai alkunsa n. 150 vuotta sitten, mutta vasta viimeisen 20 vuoden aikana eräitä perustuloksia on saatu todistettua. Samalla mielenkiinto solmuteorian sovelluksiin on kasvanut sekä muilla matematiikan aloilla että muissa luonnontieteissä.

Tämän kurssin tarkoituksena on esitellä solmuteorian perusteita ja lopuksi myös ym. uusia tuloksia, jotka ovat loppujen lopuksi yllättävän yksinkertaisia—ainakin sen jälkeen, kun sopiva menetelmä on keksitty.

Kurssille on koottu materiaalia lähinnä seuraavista kirjoista: [BZ], [Lic], [Liv], [Mu], [Ro] ja [St]. Varsinaisen solmuteorian lisäksi käsittelemme ryhmien esityksiä virittäjien ja relaatioiden avulla sekä perusryhmää teosten [MKS] ja [Vä] pohjalta.

Solmukirjoista [St] edellyttää hyvin vähän esitietoja, mutta solmut ovat vain yksi teoksen aihepiireistä. Kirjan aikajärjestyksessä olevat kommentoidut kirjallisuusviitteet antavat hyvän kuvan solmuteorian historiasta, aivan viime vuosia lukuun ottamatta.

1 Homeomorfismi ja isotopia

Tässä luvussa käsitellään niitä topologisia esitietoja, joita tarvitaan jatkossa solmujen tutkimiseen. Seuraavassa rajoitutaan ainoastaan euklidisen n-ulotteisen avaruuden $\mathbf{R}^n$ osajoukkoihin, mutta useimmat tulokset ovat voimassa myös yleisille topologisille avaruuksille. Toisaalta lukija voi myös aivan hyvin olettaa, että $n = 1,\ 2$ tai 3, jolloin käsitteiden havainnollistaminen lienee helpompaa. Tason $\mathbf{R}^2$ tapauksessa voidaan käyttää kompleksilukuja, jolloin erilaisten kuvausten määritteleminen on yksinkertaisempaa.

Määritelmä 1.1 (Homeomorfismi) Olkoot $A \subset \mathbf{R}^m$, $B \subset \mathbf{R}^n$ ja $f\colon A \to B$ funktio. Sanotaan, että f on *homeomorfismi*, jos se on jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus $f^{-1}\colon B \to A$ on jatkuva. Joukot A ja B ovat *homeomorfisia*, jos niiden välillä on homeomorfismi. Tällöin merkitään $A \approx B$.

Huomautus 1.2 (i) Joukkojen homeomorfisuus on ekvivalenssirelaatio, t.s. $A \approx A$, $(A \approx B \Rightarrow B \approx A)$ sekä $(A \approx B$ ja $B \approx C \Rightarrow A \approx C)$.
(ii) Ehto käänteiskuvauksen jatkuvuudesta on olennainen, sillä esimerkiksi funktio $f\colon [0,1[\,\to \mathbf{S}^1$, $f(t) = e^{2\pi i t}$ on jatkuva bijektio. Toisaalta jana ja ympyrä eivät näytä topologisesti samanlaisilta, joten niiden ei tulisi olla homeomorfisia. Näin ei y.o. määritelmän perusteella olekaan, ja esimerkiksi käänteiskuvaus $f^{-1}\colon \mathbf{S}^1 \to [0,1[$ on epäjatkuva pisteessä $1 \in \mathbf{S}^1$.

Solmuteoriassa joudutaan usein määrittelemään kuvauksia paloittain, jolloin seuraavaa aputuloksta käyttämällä jatkuvuus voidaan yleensä todeta helposti.

Lemma 1.3 *Olkoot $A_1, A_2 \subset \mathbf{R}^m$ suljettuja joukkoja ja $f_i\colon A_i \to \mathbf{R}^n$ jatkuvia funktioita, $i = 1, 2$. Jos $f_1(a) = f_2(a)$ kaikilla $a \in A_1 \cap A_2$, niin lausekkeella*

$$f(a) = \begin{cases} f_1(a), & \text{kun } a \in A_1, \\ f_2(a), & \text{kun } a \in A_2 \end{cases}$$

määritelty funktio $f = f_1 \cup f_2\colon A_1 \cup A_2 \to \mathbf{R}^n$ on jatkuva.

Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. Induktion avulla nähdään, että tulosta voidaan soveltaa myös useamman kuin kahden suljetun joukon tapauksessa, kunhan vain joukkojen lukumäärä on äärellinen.

Käytännössä kuitenkin käänteiskuvauksen jatkuvuuden tutkiminen tuottaa eniten hankaluuksia. Kahdessa tärkeässä erikoistapauksessa tämäkin voidaan päätellä suoraan.

Lemma 1.4 *Olkoon $f\colon A \to B$ jatkuva bijektio. Oletetaan, että joko*
(i) *A kompakti, tai*
(ii) *$A, B \subset \mathbf{R}^n$ ja A on avoin.*
Tällöin käänteiskuvaus f^{-1} on jatkuva.

Todistus. Jos A on kompakti, niin f kuvaa suljetut joukot suljetuiksi joukoiksi. Jos taas $A \subset \mathbf{R}^n$ on avoin, niin f kuvaa avoimet joukot avoimiksi. Näistä ensimmäinen tulos on alkeellinen ja löytyy kirjasta [Vä, 3.12]; jälkimmäinen perustuu ns. avoimen kuvauksen lauseeseen, jonka todistus sujuu helpoimmin algebrallisen topologia avulla, katso esim. [Br, 19.8].

Kumpikin näistä ominaisuuksista on bijektion f kohdalla yhtäpitävää sen kanssa, että f^{-1} on jatkuva. $\square$

Esimerkki 1.5 Neliön reuna $N = \partial([-1,1] \times [-1,1])$ on homeomorfinen yksikköympyrän kanssa, sillä säteittäinen projektiokuvaus $p\colon N \to \mathbf{S}^1$, $p(z) = z/|z|$, on jatkuva bijektio, ja sen käänteiskuvaus on jatkuva edellisen apulauseen ja joukon N kompaktiuden perusteella.

Jos kaksi homeomorfismia voidaan muuntaa jatkuvalla tavalla toisikseen, ja vielä siten, että kaikki välivaiheetkin ovat homeomorfismeja, puhutaan isotopiasta. Seuraava määritelmä esittää tämän käsitteen täsmällisemmin.

Määritelmä 1.6 (Isotopia) Olkoot $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $f_0, f_1 \colon A \to A$ homeomorfismeja. Jatkuva funktio $H \colon A \times [0,1] \to A$ on *isotopia* homeomorfismien f_0 ja f_1 välillä, jos

- $H(a,0) = f_0(a)$ ja $H(a,1) = f_1(a)$ kaikilla $a \in A$, ja
- funktio $h_t : A \to A$, $h_t(a) = H(a,t)$, on homeomorfismi jokaisella kiinteällä muuttujan $t \in [0,1]$ arvolla.

Tällöin merkitään $f_0 \sim f_1$ ja sanotaan, että f_0 ja f_1 ovat isotooppisia.

Määritelmä voidaan tulkita siten, että t on aikaparametri, jonka kasvaessa f_0 muuntuu jatkuvalla tavalla homeomorfismien h_t kautta homeomorfismiksi f_1. Voidaan myös ajatella, että kuvaus $t \mapsto h_t$ esittää jatkuvaa käyrää, joka yhdistää pisteet f_0 ja f_1 kaikkien joukon A homeomorfismien avaruudessa.

Usein tilanne on se, että $A = \mathbf{R}^n$ ja f_0 on identtinen kuvaus. Tällöin voidaan puhua *avaruuden* $\mathbf{R}^n$ *isotopiasta.*

Esimerkki 1.7 Olkoon $f_1 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_1(x,y) = (2x, y^3)$. Osoitetaan, että f_1 on isotooppinen tason identtisen kuvauksen f_0 kanssa.

Vaadittu isotopia $H \colon \mathbf{R}^2 \times [0,1] \to \mathbf{R}^2$ saadaan ns. janaisotopian avulla: kun isotopiaparametri t kasvaa arvosta 0 arvoon 1, piste $H(x,y,t)$ siirtyy pisteestä $f_0(x,y)$ pisteeseen $f_1(x,y)$ niiden välistä yhdysjanaa pitkin. Lausekkeena määritellään siis $H(x,y,t) = tf_1(x,y) + (1-t)f_0(x,y) = ((t+1)x, ty^3 + (1-t)y)$. Silloin H on jatkuva, $H(x,y,0) = (x,y)$, $H(x,y,0) = (2x,y^3)$, ja suhteellisen helposti nähdään, että jokainen h_t on jatkuva bijektio. Lemman 1.4 nojalla kukin h_t on homeomorfismi.

Sen sijaan esimerkiksi peilaus $f_1 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_1(x,y) = (x,-y)$, ei ole isotooppinen identtisen kuvauksen kanssa. Tämän todistaminen on hankalaa ilman algebrallista topologiaa, joten sivuutamme asian tässä yhteydessä. Vastaava tulos on voimassa kaikille peilauksille myös korkeammissa ulottuvuukissa.

Voidaan osoittaa, että kaikki avaruuden $\mathbf{R}^n$ homeomorfismit ovat isotooppisia joko identtisen kuvauksen tai peilauksen kanssa. Tapaus $n = 1$ on helppo todistaa, mutta korkeammissa ulottuvuuksissa tarvitaan ns. Schoenfliesin lauseesetta, joka jää tämän esityksen ulkopuolelle. Vastaava tulos ei kuitenkaan päde yleisesti, eli silloin, kun tarkastellaan jonkin osajoukon $A \subset \mathbf{R}^n$ homeomorfismeja.

Lause 1.8 *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$. Tällöin homeomorfismien isotooppisuus on ekvivalenssirelaatio kaikkien homeomorfismien $f \colon A \to A$ joukossa.*

Todistus. (i) Refleksiivisyys: Jos $f \colon A \to A$ on homeomorfismi, niin $f \sim f$ isotopian $H(a,t) = f(a)$ välityksellä.
(ii) Symmetrisyys: Jos $f \sim g$ isotopian $H \colon A \times [0,1] \to A$ välityksellä, niin $g \sim f$ isotopian $\tilde{H}(a,t) = H(a, 1-t)$ kautta.
(iii) Transitiivisuus: Jos $f_1 \sim f_2$ ja $f_2 \sim f_3$ isotopioiden H_1 ja H_2 kautta, niin $f_1 \sim f_3$, kun isotopiaksi valitaan

$$H(a,t) = \begin{cases} H_1(a, 2t), & \text{kun } 0 \le t \le 1/2, \\ H_2(a, 2t-1), & \text{kun } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Funktion H jatkuvuus seuraa lemmasta 1.3, sillä määrittelyjoukon suljettujen osien leikkausjoukossa $\{(a,t) \mid a \in A, t = 1/2\}$ lausekkeilla on samat arvot $f_2(a)$. $\square$

2 Solmut ja kytkökset

Tässä luvussa selvitetään solmuteorian keskeisiä käsitteitä. Määrittelemme tarkasti, mitä solmuilla ja kytköksillä oikein tarkoitetaan. Seuraavassa luvussa selvitettään, millaisia solmuja voidaan matemaattisessa mielessä pitää keskenään niin samanlaisina, että ne kannattaa jopa samastaa toisiinsa. Tämä johtaa kurssin keskeisimpään aiheeseen, joka on solmujen ja kytkösten ekvivalenssin käsite.

Määritelmä 2.1 (Solmu ja kytkös)

- *Solmu* on joukko $S \subset \mathbf{R}^3$, joka on homeomorfinen yksikköympyrän kanssa, ts. $S \approx \mathbf{S}^1$. Homeomorfismia $f\colon \mathbf{S}^1 \to S$ sanotaan solmun S *parametrisoinniksi.*
- Solmu S on *paloittain lineaarinen*, jos se on äärellinen yhdiste suorista janoista. Näiden janojen päätepisteitä sanotaan solmun S *kärjiksi.* Paloittain lineaarinen lyhennetään jatkossa muotoon PL.
- *Kytkös* on joukko $K \subset \mathbf{R}^3$ joka on yhdiste erillisistä solmuista. Jos solmujen lukumäärä on $n \geq 1$, käytetään termiä *n-kytkös.* Jos kytkös koostuu äärellisestä määrästä PL-solmuja, se on *PL-kytkös.*

Huomautus 2.2 Solmun parametrisointi f voidaan antaa myös välillä $[0, 2\pi]$ määriteltynä, jolloin yksikköympyrän piste e^{it} on samastettu pisteen $t \in [0, 2\pi]$ kanssa ja $f(0) = f(2\pi)$.

Esimerkki 2.3 (i) Yksinkertaisin solmu on triviaali solmu eli *nollasolmu* O, jonka parametrisointi on muotoa $f(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(ii) Nollasolmua mielenkiintoisempi on *kolmiapilasolmu*, jonka parametrisoinniksi käy $f(t) = ((3 + \cos(3t))\cos(2t), (3 + \cos(3t))\sin(2t), \sin(3t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Lauseke on saatu aikaan kiertämällä pisteen (3,0,0) ympäri xz-tasossa pyörivää pistettä $(3 + \cos(3t), 0, \sin(3t))$ sopivan kiertomatriisin avulla z-akselin ympäri. Piste liikkuu tällöin pitkin sellaisen toruksen pintaa, jonka säde on 1 ja jonka ytimenä on xy-tason origokeskinen 3-säteinen ympyrä.

(iii) Muita solmuja:

(iv) Eräitä kytköksiä:

Seuraava esimerkki osoittaa, että solmussa voi tietyssä mielessä olla myös äärettömän monta lenkkiä.

Esimerkki 2.4 Olkoon $S \subset \mathbf{R}^3$ alla olevan kuvion kolmiulotteinen vastine. Seuraavassa esitetään, kuinka voidaan määritellä homeomorfismi $f\colon \mathbf{S}^1 \to S$. Aloitetaan kuvaamalla ympyrän alaosa joukon S alemmalle kaarelle. Ympyrän yläosa jaetaan puolestaan pisteillä $-1, e^{i\pi/2}, e^{i\pi/4}, e^{i\pi/8}, e^{i\pi/16}, \ldots$ osakaariin, jonka jälkeen määritellään ensimmmäisessä osassa sopiva lauseke, joka parametrisoi kuvion ensimmäisen lenkin. Seuraavan lenkin parametrisointi toisen ympyrän kaaren avulla saadaan sopivasti skaalaamalla ja siirtämällä ensimmäistä parametrisointia. Jatkamalla tällä tavoin saadaan lopulta vaadittu funktio f. Jatkuvuuden osoittaminen pisteessä 1 on ainoa ongelma, eikä sekään ole vaikeaa, kun lenkit valitaan siten, että niiden koko pienenee geometrisesti suhdeluvulla $1/2$.

Jo yllä olemme piirtäneet useista solmuista ja kytköksistä kaksiulotteisia kuvia. Seuraavassa käsitellään tarkemmin tätä menetelmää, joka on käytännöllisin tapa solmujen esittämiseksi.

Olkoot $T \subset \mathbf{R}^3$ taso, $A \subset \mathbf{R}^3$ ja $P\colon \mathbf{R}^3 \to T$ kohtisuora projektio tasolle T. Joukon A *projektio* on silloin $PA \subset T$. Projektion PA *moninkertainen piste* on sellainen $p \in PA$, jolle alkukuva $A \cap P^{-1}\{p\} = \{a \in A \mid P(a) = p\}$ koostuu vähintään kahdesta pisteestä. Projektion *kaksinkertaisen pisteen* alkukuvassa on täsmälleen kaksi pistettä.

Määritelmä 2.5 Olkoon $K \subset \mathbf{R}^3$ PL-kytkös. Sen *kaavio* $\hat{K}$ on sellainen joukon K projektio PK jollekin tasolle, että
(i) projektion moninkertaisia pisteitä on äärellinen määrä ja ne ovat kaikki kaksinkertaisia;
(ii) yksikään joukon K kärki ei projisioidu kaksinkertaiselle pisteelle.

Lisäksi kaavioon on jokaisen kaksinkertaisen pisteen kohdalle merkittävä, kumpi jana on projektion suhteen ylempänä joukossa K; tämä tehdään katkaisemalla alempana kulkeva jana.

Kaksinkertaisia pisteitä sanotaan kaavion *risteyksiksi* ja niiden lukumäärä on kaavion *risteysluku* $c(\hat{K})$. Risteykset jakavat kaavion erillisiin *kaariin.*

Tarkasti ottaen kaavioon liittyvät kaaret ovat aina murtoviivoja, mutta yleisen tavan mukaisesti sovitaan, että kaavioita voi piirtää vapaalla kädellä siten, että PL-kytköksen janojen ajatellaan olevan niin lyhyitä, ettei lineaarisuus näy kaaviossa.

Kaavion määritelmään liittyvät ehdot tarkoittavat käytännössä sitä, että lapsikin osaisi kaavion perusteella muodostaa jonkin sellaisen PL-kytköksen, jota kaavio esittää.

Lemma 2.6 *Jokaisella PL-kytköksellä on kaavio. Lisäksi annetusta kytköksestä saadaan satunnaisesti valitun projektion avulla kaavio todennäköisyydellä 1.*

Todistuksen idea: Projektiosuunnat voidaan esittää kolmiulotteisen avaruuden yksikkövektoreiden eli pallon $\mathbf{S}^2$ pisteiden avulla. Jotta projektiosta tulisi kaavio, on tutkittava, millaiset projektiosuunnat ovat kiellettyjä. Koska esimerkiksi kärki ei saa projisioitua kaksinkertaiselle pisteelle, niin $P(v) \neq P(u)$ aina kun v on kytköksen kärki ja u on jonkin kytköksen janan sisäpiste. Tämä ehto rajaa pois tiettyjä projektiosuuntia, joita vastaa äärellinen määrä jatkuvasti derivoituvia käyriä pallolla $\mathbf{S}^2$. Myös muut ehdot rajaavat pois ainoastaan yksittäisiä pisteitä tai tällaisia käyriä. Yhdessä nämä pisteet ja käyrät muodostavat pallolla poikkeusjoukon, jonka pinta-ala on nolla. Väite seuraa tästä, koska kaikki projektiosuunnat poikkeusjoukon ulkopuolella johtavat kaavioon. □

Koska kaaviot ovat kaksiulotteisia, on solmuihin liittyvien operaatioiden käsittely niiden avulla usein huomattavasti yksinkertaisempaa kuin alkuperäisiin kolmiulotteisiin joukkoihin vetoaminen. On kuitenkin syytä huomata, ettei kaaviosta voi yksiselitteisesti päätellä, millä korkeudella tai missä kulmassa kytköksen osat sijaitsevat avaruudessa. Tämä ei kuitenkaan solmuteorian kannalta ole ongelmallista, kuten seuraavassa luvussa nähdään.

Kaavioita voidaan piirtää myös kytköksille, jotka eivät ole PL, mutta määritelmää on silloin muutettava sopivalla tavalla.

Tämän luvun lopuksi vielä yksi määritelmä.

Määritelmä 2.7 Kytköksestä $K \subset \mathbf{R}^3$ saadaan *suunnattu kytkös* valitsemalla sen jokaiselle komponentille *suuntaus* eli kiertosuunta. Valittua suuntausta kutsutaan positiiviseksi ja tällä tavalla suunnattulle kytkökselle käytetään merkintää K_+. Suuntaukselle vastakkainen eli negatiivinen suuntaus saadaan kääntämällä kaikkien komponenttien kiertosuunnat. Näin saadulle suunnatulle kytkökselle käytetään merkintää K_-.

Solmulla S on vain kaksi suuntausta S_+ ja S_-, mutta n-kytköksen erilaisten suuntausten lukumäärä on 2^n.

3 Solmujen ja kytkösten ekvivalenssi

Jos tarkastellaan narusta sidottua umpinaista silmukkaa tavallisessa kolmiulotteisessa avaruudessa, niin näyttäisi ilmeiseltä, että narua taivuteltaessa silmukan muoto kyllä muuttuu, mutta itse silmukka pysyy olennaisesti samana. Kaikki taivuttamalla, kiertämällä tai siirtämällä aikaansaadut muutokset silmukassa voidaan myös peruuttaa eli tehdä vastakkaiseen suuntaan siten, että päädytään takaisin alkuperäisen muotoiseen silmukkaan. Näillä toimenpiteillä muunneltuja silmukoita voidaan siis pitää jossakin mielessä samoina; olennaisesti erilaisia simukoita saadaan aikaan vain katkaisemalla naru ja yhdistämällä katkaisukohdat uudelleen aikaisemmasta poikkeavassa kohdassa. Samankaltaiset silmukat saadaan siis toisistaan jatkuvalla muunnoksella, jota matemaattisesti kuvaa kolmiulotteisen avaruuden isotopia.

Määritelmä 3.1 Kytkökset K_1 ja K_2 ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa avaruuden $\mathbf{R}^3$ isotopia H, joka muuntaa joukon K_1 joukoksi K_2, eli täsmällisemmin, isotopialle $H\colon \mathbf{R}^3 \times [0,1] \to \mathbf{R}^3$ on voimassa $H(x,0) = \mathrm{id}$ ja $h_1(K_1) = \{H(x,1) \mid x \in K_1\} = K_2$. Tällöin merkitään $K_1 \sim K_2$.

Suunnattujen kytkösten ekvivalenttius määritellään luonnollisella tavalla eli vaatimalla, että kytköksestä K_1 kytkökseen $\{H(x,1) \mid x \in K_1\}$ luonnollisella tavalla määräytyvä suuntaus on sama kuin kytköksen K_2 suuntaus. Vastaava merkintä on tällöin $K_{1+} \sim K_{2+}$.

Kytkösten ekvivalenttius määritellään siis vaatimalla, että koko avaruus muuntuu jatkuvalla tavalla isotopiassa. Ehto, joka koskisi pelkästään kytköksen jatkuvaa muuntumista, ei enää vastaisi intuitiivista käsitystä jatkuvasta muuntamisesta, sillä esimerkiksi solmuja voidaan "kiristää" jatkuvalla tavalla niin, että kaikki silmukat lopulta häviävät.

Solmuteorian kannalta ekvivalentteja kytköksiä voidaan pitää samoina, ja esimerkiksi jatkossa määrittelemme useita konstruktioita, jotka ovat hyvin määriteltyjä ainoastaan silloin, kun keskenään ekvivalentit solmut samastetaan.

Huomautus 3.2 (i) Kytkösten ekvivalenttius on ekvivalenssirelaatio. Tämä seuraa samaan tapaan kuin isotopioiden ekvivalenssin kohdalla, mutta nyt on oltava hieman tarkempi sen suhteen, että alku-, loppu- ja liitoskohdat menevät oikein. Jos esimerkiksi $S_1 \sim S_2$ isotopian H kautta, niin $S_2 \sim S_1$, kun isotopiaksi valitaan $\tilde{H}(x,t) = H(h_1^{-1}(x), 1-t)$, missä $x \in \mathbf{R}^3$ ja $0 \leq t \leq 1$.
(ii) Jos kahdella kytköksellä on sama (suunnattu) kaavio, niin kytkökset ovat (suunnatusti) ekvivalentteja. Tarvittavassa isotopiassa pisteet liikkuvat ainoastaan projektiosuunnassa.
(iii) PL-kytkösten ekvivalenttius määritellään yleensä vaatimalla, että myös isotopia on tietyssä mielessä paloittain lineaarinen. Tämä on kuitenkin yhtäpitävää y.o. määritelmän kanssa, mutta asian todistaminen ei ole helppoa.

Määritelmä 3.3 (i) Olkoon $K \subset \mathbf{R}^3$ kytkös. Kytköksen K *peilikuva* on kytkös $\rho(K)$, missä $\rho\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ on peilaus $\rho(x,y,z) = (x,y,-z)$.
(ii) Kytkös K on *peilautuva*, jos $\rho(K) \sim K$.
(iii) Suunnattu kytkös K_+ on *kääntyvä*, jos $K_+ \sim K_-$.

Jos PL-kytkökselle K saadaan kaavio $\hat{K}$ käyttämällä kohtisuoraa projektiota xy-tasoon, niin on geometrisesti selvää, että peilikuvalle $\rho(K)$ saadaan kaavio yksinkertaisesti vaihtamalla jokaisessa kaavion $\hat{K}$ risteyksessä ylitys ja alitus keskenään. Jos pidämme ekvivalentteja kytköksiä samoina, niin vastaava tulos on voimassa kaikille kaavioille, sillä kaikki peilaukset ovat isotooppisia keskenään.

Isotopioiden määrittely on yleensä työlästä, ja sen vuoksi olisi löydettävä yksinkertaisempi tapa ekvivalenttisuuden tutkimiseen. Ainakin PL-kytköksille tämä onnistuu tutkimalla niiden kaavioiden muuntamista yksinkertaisten välivaiheiden avulla. Nämä välivaiheet ovat Reidemeisterin siirtoja.

Määritelmä 3.4 Olkoon $\hat{K}$ jonkin PL-kytköksen kaavio. Kun kaavioon $\hat{K}$ tehdään paikallisia muunnoksia seuraavien kuvioiden mukaisesti, sanotaan, että uusi kaavio on saatu $\hat{K}$:sta *Reidemeisterin siirron* avulla. Reidemeisterin siirtoja on neljä olennaisesti erilaista, ja ne ovat:

R_0

R_1

R_2

R_3

Kaikkien siirtojen kohdalla kaaviota muutetaan ainoastaan kuvioiden osoittamissa kohdissa, joten muut risteykset pysyvät ennallaan. Käänteiseen suuntaan tehdyille siirroille käytetään merkintöjä R_i^{-1}, $i = 0, 1, 2, 3$.

Huomautus 3.5 (i) Reidemeisterin siirtojen tuloksena saadut kytkökset ovat myös PL-kytköksiä, mutta ne voidaan tavalliseen tapaan esittää vapaasti piirrettyinä. Muunnosten taustalla on ajatus siitä, etteivät kuvien kaltaiset operaatiot olennaisella tavalla muuta taustalla olevaa kolmiulotteista kytköstä.
(ii) Se, minkä muotoiseksi uudet kaaviot piirretään, ei tuota ongelmaa, jos sallimme kunkin kaavion muotoilemisen äärellisellä määrällä siirtoja $R_0^{\pm 1}$. Tämä vastaa myös seuraavan määritelmän ajatusta siitä, että ainoastaan olennaisesti erilaiset kaaviot ovat solmuteorian kannalta mielenkiintoisia.

Määritelmä 3.6 Olkoot $\hat{K}_1$ ja $\hat{K}_2$ PL-kytkösten K_1, K_2 kaavioita jollakin tasolla. Sanotaan, että kaaviot ovat *ekvivalentteja*, jos ne saadaan toisitaan äärellisellä määrällä Reidemeisterin siirtoja $R_i^{\pm 1}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Kaavioiden ekvivalenssille käytetään merkintää $\hat{K}_1 \sim \hat{K}_2$.

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä suunnattujen kaavioiden ekvivalenssi, sillä Reidemeisterin siirrot määräävät luonnollisella tavalla suuntauksen myös uusiin kaavioihin.

Esimerkki 3.7 Reidemeisterin siirtojen joukossa ei ole esimerkiksi seuraavaa operaatiota:

Vastaava lopputulos saadaan kuitenkin aikaan soveltamalla useita "standardisiirtoja" peräkkäin:

Samalla tavalla voidaan osoittaa, että kaikki "luonnolliset" operaatiot voidaan palauttaa standardisiirtoihin.

Seuraavan tuloksen perusteella solmujen ekvivalenttisuus selviää pelkästään kaavioita tutkimalla.

Lause 3.8 *Olkoot K_1 ja K_2 PL-kytköksiä. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*
(i) $K_1 \sim K_2$;

(ii) $\hat{K}_1 \sim \hat{K}_2$;
(iii) *on olemassa* suuntauksen säilyttävä *homeomorfismi* $h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, *jolle* $hK_1 = K_2$.

Lauseen todistuksessa tarvitaan jälleen Schoenfliesin lausetta, joten sivuutamme sen. Kolmannessa ehdossa esiintyvä käsite *suuntauksen säilyttävä* on hankala määriteltävä ilman algebrallista topologiaa. Jos h on jatkuvasti derivoituva, niin suuntauksen säilyminen on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvauksen h Jacobin determinantti on suurempi kuin nolla jossakin pisteessä. Kaikki suuntauksen säilyttävät homeomorfismit ovat isotooppisia identtisen kuvauksen kanssa, suuntauksen kääntävät puolestaan peilauksen kanssa.

Seuraavat solmuihin liittyvät ongelmat ovat tärkeitä sekä historiallisesti että myös tämän kurssin kannalta. Yritämme jatkossa vastata ainakin jollakin tavalla seuraaviin kysymyksiin:

- Mitkä solmut ovat keskenään ekvivalentteja, ja miten ekvivalenttius saadaan käytännössä selville?
- Voidaanko solmuja "taulukoida"?
- Milloin solmuja koskevia tuloksia voidaan päätellä suoraan sopivan kaavion avulla?
- Millaiset solmut ovat peilautuvia?
- Millaiset solmut ovat kääntyviä?

4 Yksinkertaisia solmuinvariantteja

Solmuinvariantilla tarkoitetaan sellaista matemaattista objektia, joka voidaan liittää kaikkiin solmuihin (tai kytköksiin) ja jolla on ekvivalenttien solmujen (kytkösten) tapauksessa sama arvo. Yksinkertaisimpia invariantteja ovat risteysluku, avausluku ja kytkösten kohdalla kiinnitysluku, jotka ovat kokonaislukuja. Myöhemmin käsitellään solmuinvariantteja, jotka ovat esimerkiksi ryhmiä tai polynomeja.

Hyvältä solmuinvariantilta $\mathrm{inv}(S)$ vaaditaan kolme ominaisuutta:

- $\mathrm{inv}(S_1) = \mathrm{inv}(S_2) \Leftrightarrow S_1 \sim S_2$;
- $\mathrm{inv}(S)$ on helppo määrittää esimerkiksi kaavion avulla;
- eri solmujen invarianteista voidaan helposti päätellä, ovatko kyseiset invariantit samoja.

Tällä hetkellä ei tunneta sellaisia invariantteja, joilla olisi kaikki kolme ominaisuutta. Sen sijaan on olemassa algoritmi, jonka avulla solmun ekvivalenssiluokka voidaan tunnistaa, mutta se perustuu 3-monistojen teoriaan ja on käytännössä hankala.

Määritelmä 4.1 Olkoon $K \subset \mathbf{R}^3$ PL-kytkös.
(i) Kytköksen K *risteysluku* $c(K)$ on

$$c(K) = \min\{c(\hat{A}) \mid A \text{ on PL-kytkös ja } A \sim K\}.$$

(ii) PL-solmun S *avausluku* $a(S)$ on pienin sellainen kokonaisluku $k \geq 0$, jolla on seuraava ominaisuus: On olemassa solmu $B \sim S$, jonka kaavio $\hat{B}$ muuttuu nollasolmua esittäväksi kaavioksi, kun k kappaleessa risteyksiä ylitys ja alitus vaihdetaan keskenään.

Koska risteys- ja avauslukujen määritelmissä käydään läpi koko solmun tai kytköksen ekvivalenssiluokka, niistä tulee automaattisesti solmuinvariantteja. Ainoa ongelma liittyy siihen, onko avausluku äärellinen, mutta harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että kaikille PL-solmuille S pätee $a(S) \leq (c(S) - 1)/2$, kunhan vain $c(S) \geq 1$.

Näillä invarianteilla on kuitenkin se huono puoli, etteivät ne toteuta kahta ensimmäistä hyvältä invariantilta vaadittavaa ehtoa, sillä risteys- ja varsinkin avauslukujen määrittäminen on käytännössä hankalaa, eikä esimerkiksi avauslukuja tunneta kaikille suhteellisen yksinkertaisillekaan solmuille.

Avausluku voidaan määritellä myös PL-kytköksille, mutta se jääköön lukijan tehtäväksi.

Viitteet

[Br] G.E. Bredon: Topology and Geometry. Springer, 1993.

[BZ] G. Burde, H. Zieschang: Knots. de Gruyter, 1986.

[Lic] W.B.R. Lickorish: An Introduction to Knot Theory. Springer, 1997.

[Liv] C. Livingstone: Knot Theory. Carus Mathematical Monographs 24, The Mathematical Association of America, 1993.

[MKS] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar: Combinatorial Group Theory. Wiley Interscience, 1966.

[Mu] K. Murasugi: Knot Theory & Its Applications. Birkhäuser, 1996.

[Ro] D. Rolfsen: Knots and Links. Publish or Perish, 1990.

[St] J. Stillwell: Classical Topology and Combinatorial Group Theory, 2nd Edition. Springer, 1993.

[Vä] J. Väisälä: Topologia II. Limes ry, 1999.