Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 9. (5.4.)

Tehtävissä 1 ja 2 tarvitaan perustietoja permutaatioryhmistä. Tarvittavat asiat löytyvät esim. kirjasta Nicolson: Introduction to Abstract Algebra, varsinkin kohdat 2.8 ja 8.1.

1. a) Olkoon $g \in S_n$ ja olkoon $c = (a_1 \ \dots \ a_p) \in S_n$ p-sykli. Osoita, että gcg^{-1} on p-sykli $(g(a_1) \ \dots \ g(a_p))$.
   b) Osoita, että kaikki samanpituiset syklit saadaan toisistaan konjugoimalla.
   c) Osoita, että kaksi permutaatiota $a,\ b \in S_n$ ovat samassa konjugaatioluokassa täsmälleen silloin, kun molempien jaoissa erillisiin sykleihin esiintyy sama määrä kunkin pituisia syklejä.

2. a) Määritä ryhmän S_3 alkioiden konjugaatioluokat.
   Vast: Kolme erilaista luokkaa.
   b) Määritä ryhmän S_4 alkioiden konjugaatioluokat.
   Vast: Viisi erilaista luokkaa.

3. a) Tutki Wirtingerin esityksen relaatioita, ja osoita, että PL-solmun ryhmässä G kaikki virittäjät ovat toistensa konjugaatteja; ts. jos $a,\ b$ ovat virittäjiä, niin $a = gbg^{-1}$ sopivalla ryhmän alkiolla g.
   b) Solmun 4_1 ryhmälle saatiin viime kerralla (sopivilla valinnoilla) esitys
   $$G = < a, b \mid a^{-1}bab^{-1}ab = ba^{-1}ba > .$$
   Osoita, että relaatio voidaan kirjoittaa muotoon $a = (b^{-1}aba^{-1})b(b^{-1}aba^{-1})^{-1}$.
   c) Osoita, ettei ole olemassa surjektiivista homomorfismia $\varphi\colon G \to S_3$.
   Vihje: Virittäjät kuvautuvat samaan konjugaatioluokkaan (miksi?), mikä vähentää tarvittavien kokeilujen määrää.
   d) Osoita, ettei solmun 4_1 ryhmä G ole vaihdannainen käyttämällä sopivaa homomorfismia $\varphi\colon G \to S_4$.
   Vihje: Valitse esim. $\varphi(a) = (1\ 2\ 3\ 4)$.

4. Tarkastellaan alla olevan kuvan osoittamaa kytköstä K, jossa on $2n$ komponenttia. Sen perusryhmän G virittäjät $x_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i,\ 0 \leq n-1$, on merkitty kuvioon.
   a) Selvitä virittäjien väliset relaatiot (4 kpl) peräkkäisissä risteyksissä. (Huom: jos virittäjien alaindeksit luetaan $(\mathrm{mod}\, n)$, niin alkukohtaa ei tarvitse käsitellä erikseen)
   b) Osoita, että on olemassa surjektiivinen homomorfismi
   $\varphi\colon G \to F_2 = < \alpha, \beta \mid - >$, jolle
   $\varphi(x_i) = \alpha,\ \varphi(y_i) = \beta,\ \varphi(z_i) = \beta^{-1}\alpha\beta,\ \varphi(w_i) = \alpha^{-1}\beta\alpha$ kaikilla i.
   c) Kirjoita kuvioon piirretty silmukka γ virittäjien avulla ja osoita b-kohdan avulla, että γ on homotooppisesti kytketty K:hon.

Kääntöpuolella on pääsiäisloman ratoksti oheislukemista torus-solmuista, joista yksinkertaisin on kolmiapila 3_1.