Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 8. (22.3.)

1. Määritä oheisen pinnan perusryhmä käyttämällä Seifertin ja van Kampenin lausetta. Lopputuloksessa on neljä virittäjää ja yksi relaatio.
   Vihje: Luennolla johdettiin pinnan {torus\pieni kiekko} virittäjät ja relaatiot.

2. a) Muodosta solmun 4_1 ryhmälle esitys Wirtingerin menetelmän avulla.
   b) Valitse yksi relaatioista ja osoita, että se seuraa muista.
   c) Muodosta esitys, jossa on vain kaksi virittäjää ja yksi relaatio.

3. a) Tutki Wirtingerin esityksen relaatioita ja osoita, että jos PL-solmun ryhmä abelisoidaan (eli lisätään relaatiot $a_i a_j = a_j a_i$), niin tuloksena on ryhmän $\mathbf{Z}$ esitys. Toisin sanoen $H_1(\mathbf{R}^3 \setminus S) \cong \pi(S)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}$. Millainen silmukka virittää tämän ryhmän?
   b) Osoita, että kuvioon piirretty silmukka on **homologisesti kytkeytymätön** solmuun 4_1.
   Vihje: Esitä silmukka edellisen tehtävän virittäjien avulla. Määritelmä alla.

4. Muodosta alla olevalle kytkökselle esitys, jossa on kolme virittäjää ja kaksi relaatiota.

Määritelmä. Olkoon K kytkös ja S sellainen solmu, joka ei kohtaa kytköstä K. Sanotaan, että S on *homotooppisesti kytkeytymätön* K:hon, jos silmukkaa S vastaava homotopialuokka on triviaali ryhmässä $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus K)$. Vastaavasti S on *homologisesti kytkeytymätön* K:hon, jos silmukkaa S vastaava homologialuokka on triviaali ryhmässä $H_1(\mathbf{R}^3 \setminus K)$.