Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 7. (15.3.)

1. Osoita, että $< a, b \mid (ab)^2 ab^2 = 1 > \cong < \alpha \mid - > \cong \mathbf{Z}$.
   Vihje: Merkitse aluksi $x = ab$, $y = ab^2$ ja eliminoi a, b. Voit perustella laskut muuttajan vaihdoilla ilman Tietzen muunnoksia.

2. Kolmen alkion permutaatioryhmälle S_3 on saatu esitykset

   $$< a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1, ba = ab^2 > \quad \text{ja} \quad < \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \beta^3 = 1, (\alpha\beta)^3 = 1 > .$$

   Miten näiden esitysten isomorfisuus voidaan johtaa Tietzen muunnosten avulla?
   Vihje: Aikaisemmissa laskuissa oli $a = (1\ 3)$, $b = (1\ 2\ 3)$, $\alpha = (1\ 2)$ ja $\beta = (1\ 3)$. Johda tarvittava muunnos näiden avulla.

3. Osoita, että

   $$< a, b \mid a^4 = 1, b^4 = 1, ba = a^2 b^2 > \cong < \alpha, \beta \mid \alpha^5 = 1, \beta^4 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha^2 >,$$

   kun merkitään $\alpha = ba$, $\beta = b$.
   Vihje: Perustele aluksi seuraavat kaavat:

   $$(ba)^2 = baba = a^2 b^2 ba = a^2 b^{-1} a = a^3 a^{-1} b^{-1} a = a^3 b^2 a^3 = a a^2 b^2 a^3 = aba^4 = ab,$$

   joten

   $$(ba)^6 = (ab)^3 = a(ba)^2 b = a^2 b^2 = ba.$$

4. a) Laske edellisen tehtävän ryhmän alkioiden lukumäärä. Tutki eri vaihtoehtoja:
   (i) Ensimmäinen esitys: Viimeisen relaation perusteella voisi huolimattomasti ajatella, että sanojen normaalimuodoiksi voidaan valita $a^m b^n$, joten alkiota olisi 16. Tämä ei pidä paikkaansa; miksei? (Yritä muuttaa esim. *baba* ym. muotoon).
   (ii) Toinen esitys: Perustele, että normaalimuodoiksi käyvät sanat $\beta^m \alpha^n$ ja ratkaise tehtävä tämän avulla. (Järkevä selitys ilman tarkkaa todistusta riittää.)
   b) Miten saadaan normaalimuodot ensimmäiselle esitykselle edellisen tehtävän ja kohdan (ii) avulla?