Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 6. (8.3.)

1. *Burnsiden ongelma* (v. 1902) liittyy ryhmiin

   $$B(r,e) = < a_1, \ldots, a_r \mid w^e = 1 \text{ kaikille virittäjistä muodostetuille sanoille } w >,$$

   missä r ja e ovat luonnollisia lukuja. Ongelmana on selvittää, onko $B(r,e)$ äärellinen ryhmä. Selvitä (ongelman 100-vuotisjuhlallisuuksien kunniaksi)
   a) tapaukset $e = 1$ tai $r = 1$ ja luettele ryhmien alkiot.
   b) tapaus $e = 2$ ja määritä ryhmän alkioiden lukumäärä.
   Vihje (b): Osoita aluksi, että kyseessä on Abelin ryhmä; mitä ehto $a^2 = 1$ kertoo a:n käänteisalkiosta?
   Lisätieto: V. 1968 Adian ja Novikov osoittivat, että $B(2, 4381)$ on ääretön ryhmä; sitä ennen tunnettiin vain äärellisiä Burnsiden ryhmiä.

2. Olkoot a ja b jonkin ryhmän alkioita. Osoita, että
   a) jos $a^6 = 1$ ja $ab = ba^3$, niin $a^2 = 1$ ja $ab = ba$.
   b) jos $a^6 = 1$ ja $ab = ba^2$, niin $a^3 = 1$ ja $aba = b$.

3. Osoita, että kolmen alkion permutaatioryhmällä on esitys

   $$S_3 \cong < a, b \mid a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ (ab)^3 = 1 >,$$

   kun asetetaan $a = (1\ 2)$ ja $b = (1\ 3)$.
   Vihje: Totea, että alkioiden perusmuodot ovat $1, a, b, ab, ba$ ja aba. Esitä sitten, kuinka kaikki sanat voidaan palauttaa relaatioiden avulla johonkin perusmuotoon, esim. seuraavien vaiheiden kautta:
   (i) virittäjien eksponentti voidaan muuttaa luvuksi 1 (myös sanojen sisällä);
   (ii) $baba \to ab$, $abab \to ba$, $bab \to aba$;
   (iii) yleinen sana saadaan perusmuotoon näiden avulla.

4. Diedriryhmä (dihedral group) D_{2n} koostuu muotoa

   $$\begin{bmatrix} \epsilon & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   olevista matriiseista, missä $\epsilon = \pm 1$, $0 \le k \le n-1$ ja kertolaskussa matriisialkiot redusoidaan (mod n).
   a) Selvitä ryhmän alkiot.
   b) Osoita, että ryhmällä on esitys

   $$D_{2n} \cong < a,\ b \mid a^n = 1,\ b^2 = 1,\ aba = b >,$$

   kun valitaan

   $$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Vihje: Osoita aluksi, että ryhmän alkiot ovat muotoa a^k ja $a^k b$, missä $0 \le k < n$. Selitä sitten, kuinka muut sanat voidaan palauttaa näihin perusmuotoihin.