Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 5. (1.3.)

Ratkaise neljä tehtävää seuraavista.

1. (VäII, 21.9) Osoita, että jatkuva kuvaus $f\colon X \to Y$ on homotopiaekvivalenssi $\Leftrightarrow$ on olemassa jatkuvat $g_1,\ g_2\colon Y \to X$, joille $g_1 \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ ja $f \circ g_2 \simeq \mathrm{id}_Y$.
   Vihje: Tutki kuvausta $g_1 \circ f \circ g_2$.

2. (VäII, 22.2) Osoita, että polkuyhtenäisessä avaruudessa kaikki polut ovat keskenään homotooppisia. (Tässä ei siis vaadita, että päätepisteet pysyvät paikoillaan)

3. (VäII, 23.4) Olkoot X ja Y polkuyhtenäisiä ja $p\colon X \times Y \to X$, $q\colon X \times Y \to Y$ projektiokuvaukset $p(x,y) = x,\ q(x,y) = y$. Osoita, että kuvaus
   $f\colon \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0),\ f(\bar{\alpha}) = (p_*(\bar{\alpha}), q_*(\bar{\alpha}))$,
   on ryhmäisomorfismi.
   Huom: Oikealla puolella laskutoimitus on muotoa $(a,b)(a',b') = (aa',bb')$.

4. (VäII, 23.6) Osoita, että avaruus X on yhdesti yhtenäinen $\Leftrightarrow$ kaikki kuvaukset $f\colon S^1 \to X$ ovat keskenään homotooppiset.
   Vihje: Tehtävä 2.

5. Todista ns. Lebesguen peitelause [VäI, 13.33]: Jos $A \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti ja $A \subset \cup_{i \in I} D_i$, missä joukot D_i ovat avoimia, niin on olemassa sellainen $\lambda > 0$, että pätee: jos $x \in A$, niin $B(x, \lambda) \subset D_i$ jollakin $i \in I$.
   Vihje: Tee vastaoletus: mikään luku $\lambda = 1/n$, $n \in \mathbf{N}$, ei toteuta ehtoa, ja valitse kullakin n sellainen x_n, joka rikkoo ehdon. Tutki jonoa (x_n) ja käytä (jono)kompaktiutta.

Huom: Viikolla 8 eli 22.2. ei hiihtoloman vuoksi ole luentoa eikä harjoituksia.