Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 2. (1.2.)

1. Osoita, että napakoordinaattien avulla määritelty homeomorfismi $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(r,\varphi) = (r^2,\varphi)$, on isotooppinen identtisen kuvauksen kanssa.

2. Olkoon $f\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ sellainen homeomorfismi, että funktio $\varphi \mapsto \arg f(e^{i\varphi})$ on kasvava. Osoita, että f on isotooppinen identtisen kuvauksen kanssa.

3. Olkoon $f\colon \overline{\mathbf{B}}^2 \to \overline{\mathbf{B}}^2$ homeomorfismi, jolle $f(z) = z$ kaikilla $z \in \mathbf{S}^1$. Osoita, että f on isotooppinen $\overline{\mathbf{B}}^2$:n identtisen kuvauksen kanssa käyttämällä esimerkiksi lauseketta
$$H(z,t) = \begin{cases} z, & \text{kun } t \le |z| \le 1, \\ tf(z/t), & \text{kun } |z| \le t, \end{cases}$$
arvoilla $0 < t \le 1$, ja asettamalla $H(z,0) = z$ kaikilla $z \in \overline{\mathbf{B}}^2$. Viime kerran tehtävästä 1 saattaa olla apua. Huom: Sama lauseke toimii kaikissa dimensioissa. Tällä isotopialla on lisäksi se ominaisuus, että reunapisteet pysyvät paikoillaan koko isotopian ajan.

4. Olkoot f, $g\colon \overline{\mathbf{B}}^2 \to \overline{\mathbf{B}}^2$ sellaisia homeomorfismeja, että $f(z) = g(z)$ kaikilla $z \in \mathbf{S}^1$. Osoita, että f ja g ovat isotooppisia.
Vihje: Tutki aluksi funktiota $f^{-1} \circ g$. Miten se käyttäytyy reunalla?