Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 11. (19.4.)

Huom: Tämän kerran tehtävissä tarvitaan luennolla esitettyjä lauseita, joita ei (ainakaan vielä) ole todistettu.

Kaikissa tehtävissä solmut ovat PL.

1. a) Päättele solmutaulukon perusteella, millaisia olisivat solmut $9_1,\ 11_1,\ldots$.
   b) Totea, että jos kaavion risteysten lukumäärä on parillinen, niin samalla periaatteella muodostettu kaavio esittää kytköstä.
   c) Olkoon $P_{2n+1}(t)$ solmun $(2n+1)_1$ Jonesin polynomi. Johda palautuskaava, jonka avulla nämä polynomit voidaan laskea.
   Vihje: Käytä apuna viime viikon tehtävän 2 kaavaa sekä b-kohdan kytköksen Jonesin polynomia Q_{2n}.
   d) Laske kaavan avulla $V(5_1)$ ja $V(7_1)$ ja tarkista tuloksesi kääntöpuolen taulukosta.

2. Perustele luentojen lauseiden tai edellisen tehtävän avulla, että on olemassa äärettömän monta alkusolmua, joista mitkään kaksi eivät ole keskenään ekvivalentteja.

3. a) Osoita Taitin II konjektuurin avulla, että $w(K) = 0$ aina kun K on peilautuvan ja vuorottelevan solmun redusoitu ja vuorotteleva kaavio.
   b) Olkoon S vuorotteleva solmu, jonka risteysluku on pariton. Osoita a-kohdan avulla, ettei S ole peilautuva.

4. a) Osoita, että kahden vuorottelevan solmun summa on vuorotteleva. (Vrt. luentoesimerkki)
   b) Olkoon $S_1 + S_2$ vuorotteleva solmu. Osoita, että S_1 ja S_2 ovat molemmat vuorottelevia.
   c) Olkoot S_1 ja S_2 vuorottelevia solmuja. Osoita, että $c(S_1+S_2) = c(S_1)+c(S_2)$. Tässä c tarkoittaa solmun risteylukua.
   d) Osoita, että ainoa solmu S, jolla on käänteissolmu S^{-1}, on nollasolmu.
   Vihje: Käänteissolmulle pätee $S + S^{-1} = O$. Huomaa, että nollasolmu on vuorotteleva.
   Huom: Ei tiedetä, päteekö c-kohdan kaava kaikille solmuille.