Teknillinen korkeakoulu
Johdatus solmuteoriaan, kevät 2002
Laskuharjoitus 1. (18.1.???)

1. a) Todista: Jos $A_1,\ A_2 \subset \mathbf{R}^n$ ovat suljettuja ja $f_1\colon A_1 \to \mathbf{R}^n$, $f_2\colon A_2 \to \mathbf{R}^n$ ovat sellaisia jatkuvia funktioita, että $f_1(x) = f_2(x)$ aina kun $x \in A_1 \cap A_2$, niin kaava
$$f(a) = \begin{cases} f_1(a), & \text{kun } a \in A_1, \\ f_2(a), & \text{kun } a \in A_2 \end{cases}$$
määrittelee jatkuvan funktion $f = f_1 \cup f_2\colon A_1 \cup A_2 \to \mathbf{R}^n$.
b) Anna esimerkki tilanteesta, jossa joukot eivät ole suljettuja ja funktiosta f tulee epäjatkuva.

2. Järjestä aakkoset A, B, C, ..., Å, Ä, Ö sellaisiin ryhmiin, että samassa ryhmässä olevat kirjaimet ovat keskenään homeomorfisia. Voit itse valita, miten kirjaimet tarkasti ottaen piirretään.

3. Olkoon $f\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ homeomorfismi. Osoita, että on olemassa sellainen homeomorfismi $F\colon \overline{\mathbf{B}}^2 \to \overline{\mathbf{B}}^2$, että $F(z) = f(z)$ kaikilla $z \in \mathbf{S}^1$.

   Tässä $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ ja $\overline{\mathbf{B}}^2 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$.

4. Olkoon $f\colon [0,1] \to]-1,1[$ jatkuva funktio, jolle $f(0) = f(1) = 0$. Määrittele homeomorfismi $F\colon [0,1] \times [-1,1] \to [0,1] \times [-1,1]$, joka
(i) pitää kaikki suorakaiteen reunapisteet paikoillaan,
(ii) suoristaa funktion f kuvaajan janaksi $[0,1]$.
Riittää antaa jokin toimiva lauseke; jatkuvuutta jms. ei tarvitse todistaa, ellet välttämättä halua.