Lien ryhmät ja monistot   Harj. 9 / 2006

9.1 $f: SU(n) \times U(1) \longrightarrow U(n)$

$$(A, \lambda) \longmapsto \lambda \cdot A$$

Selvä: f on hyvin määritelty & homomorfismi.

$$U(1) = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi) \}$$
$$U(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^{\#} = I \}$$
$$SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = +1 \}$$

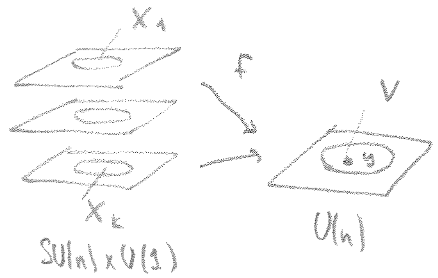
<u>Väite:</u> f on sileä surjektio s.e.

$\forall y \in U(n) \ \exists\, V \overset{\circ}{\subset} U(n)$ s.e. $y \in V$ ja

- $f^{-1}(V) = \bigcup_{k=0}^{n-1} X_k$ s.e.

  X_k:t ovat avoimia & erillisiä.

- $f: X_k \longrightarrow V$ diffeo



<u>Tod</u> f on sileä on selvä.

Olkoon $B \in U(n)$

$$f^{-1}(B) = \{ (A, \lambda) \mid A \in \overset{\det A = 1}{U(n)}, \lambda \in U(1) \ \ \lambda A = B \}$$
$$= \{ (\lambda^{-1} B, \lambda) \mid \lambda^{-n} \det B = 1, \ \lambda \in U(1) \}$$
$$= \{ (\lambda^{-1} B, \lambda) \mid \det B = \lambda^n, \ \lambda \in \mathbb{C} \}$$

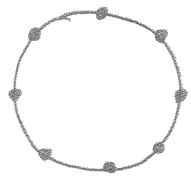
Olkoon $\alpha \in U(1)$. Merk $r_k^n(\alpha) = \alpha$:n k:s juuri

Eli: Jos $\alpha = e^{i\theta}$ niin $r_k^n(\alpha) = e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$.

<u>Määr:</u> $F_k: U(n) \longrightarrow SU(n) \times U(1)$

$$B \longmapsto \left(\frac{1}{r_k^n(\det B)} B, \ r_k^n(\det B) \right)$$

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{k=0}^{n-1} F_k(B) \implies f \text{ surjektio}$$

$r^n_k(\det B)$ erillisiä $U(1)$:ssä: 

Lemma:

det: $U(n) \longrightarrow U(1)$ avoin

eli: Jos $A \subset\!\!\!\circ\; U(n)$ niin $\det A \subset\!\!\!\circ\; U(1)$ (tod. alla)

Olkoon $B_\varepsilon \subset U(n)$ ε-säteinen B-keskeinen kuula.
$U(1)$ Hausdorff ja $r^n_k \circ \det$ jatkuva.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ s.e. $\{r^n_k(\det B_\varepsilon)\}_k$ ovat erillisiä.

$r^n_k : U(1) \xrightarrow{\text{avoin}} U(1)$
& Lemma $\Rightarrow$ $\{r^n_k(\det B_\varepsilon)\}_{k=0}^{n-1}$ avoimia erillisiä joukkoja.

$$\text{eli } f^{-1}(B_\varepsilon) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left\{\left(\frac{1}{r^n_k(\det x)}\, x,\ r^n_k(\det x)\right) \,\middle|\, x \in B_\varepsilon\right\}}_{=:\, X_k \,\subset\, SU(n)\times U(1)}$$

X_k:t erillisiä: sillä $r^n_k(B_\varepsilon)$ ovat

X_k:t avoimia: uskottava ... $\left(\begin{array}{l}\text{Todistuksen idea: } \forall\, x \in X_k \\ \exists\, W_x \text{ s.e. } x \in W_x \subset\!\!\!\circ\; X_k,\ W_x \subset\!\!\!\circ\; SU(n)\times U(1)\end{array}\right)$

<u>Väite:</u> $f : X_k \longrightarrow B_\varepsilon$ bijektio $k = 0, 1, \dots, n-1$

Olkoon $(A, \lambda) \in X_k$; $A = \dfrac{1}{r^n_k(\det x)} \cdot x$ jollain $x \in B_\varepsilon$

$$\lambda = r^n_k(\det x)$$

$$F_k\big|_{B_\varepsilon} \circ f(A,\lambda) = F_k(x) = \left(\frac{1}{r^n_k(\det x)}\, x,\ r^n_k(\det x)\right)$$
$$= (A, \lambda)$$

Olkoon $y \in B_\varepsilon$:

$$f \circ F_k\big|_{B_\varepsilon}(y) = f\left(\frac{1}{r^n_k(\det y)}\, y,\ r^n_k(\det y)\right) = y$$

$\therefore$ $F_k\big|_{B_\varepsilon}$ on $f\big|_{X_k} : X_k \to B_\varepsilon$:n käänteiskuvaus
$\Rightarrow$ f bijektio. $\square$

$f: X_k \longrightarrow B_\varepsilon$ on sileä koska

$f: SU(n) \times U(1)$ on sileä

det, r_k^n ovat sileitä $\Rightarrow$ F_k sileä

$\Rightarrow$ $\tilde{f}: X_k \longrightarrow B_\varepsilon$ diffeo $\square$

Todistetaan, että det : $U(n) \longrightarrow U(1)$ on avoin.

Riittää osoittaa: Jos $U \overset{\circ}{\subset} U(n)$ ja $A \in U$

niin löytyy Ω s.e.
$$\begin{cases} A \in \Omega \subset U \\ \Omega \overset{\circ}{\subset} U(n) \\ \det \Omega \overset{\circ}{\subset} U(1). \end{cases}$$

(Tällöin $\det U = \bigcup_{A \in U} \det \Omega_A$.)

$\mathfrak{u}(n) \longrightarrow U(n)$

$u \longmapsto A \cdot e^u$ jva $\Rightarrow$ $\exists\, r > 0$ s.e. (B_r = 0-kestinen kuula $M_n(\mathbb{C})$:ssä)

$A \cdot \exp^{B_r \cap \mathfrak{u}(n)} \subset U$

L7.1.5 $\Rightarrow$ voidaan olettaa, että $\exp: B_r \cap \mathfrak{u}(n) \rightarrow \exp(B_r \cap \mathfrak{u}(n))$ on diffeo.

Aseta: $\Omega = A \cdot \exp(B_r \cap \mathfrak{u}(n))$

Saadaan: $A \in \Omega$, $\Omega \subset U$, exp diffeo $\Rightarrow$ $\Omega \overset{\circ}{\subset} U(n)$

$\det \Omega = \det A \cdot \det \exp(B_r \cap \mathfrak{u}(n)) = \det A \cdot e^{\operatorname{trace}(B_r \cap \mathfrak{u}(n))}$

Väite seuraa, sillä 1) e avoin (se on aidosti kasvava)

2) trace on avoin. (ei todisteta.) $\square$

9.2

$$g: SU(n) \times U(1) \longrightarrow U(n)$$
$$(A, \lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \swarrow \begin{array}{l} r_i = A\text{:n} \\ \text{i:s rivi} \end{array}$$

g ei homomorfismi:

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, i \right) \cdot g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, i \right) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & \\ & -i \end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, -1 \right) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \square$$

g surjektio

$A \in U(n)$. Ol. $\lambda = \det A \in U(1)$

Aset. $B = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ (*) r_i:t $=$ A:n rivit

$\det B = \bar{\lambda} \cdot \det A = 1$, eli $B \in SU(n)$

$g(B, \lambda) = A$.

g injektio

$(A, \lambda), (B, \mu) \in SU(n) \times U(1)$

r_i:t ovat A:n rivit s_i:t B:n rivit

Ol. $\begin{cases} \lambda r_1 = \mu s_1 \\ r_k = s_k \quad k = 2, \dots, n \end{cases}$

$\det g(A, \lambda) = \det g(B, \mu) \Rightarrow \lambda \cdot \underbrace{\det A}_{=1} = \mu \underbrace{\det B}_{=1}$

$\Rightarrow \lambda = \mu \Rightarrow A = B \quad \square$

f jva, ja $B = B(A)$ (kts. (*)) on jva $\Rightarrow$ f on homeo.

Esim: $U(1) \simeq U(1) \times SU(1) \leftarrow \{1\}$ $\square$

(9.3)

(1) $Z(SO(2m)) = \begin{cases} SO(2) & m=1 \\ \{\pm I\} & m \geq 2 \end{cases}$

$\underline{m=1}$ $\quad SO(2) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$; $\quad R_\theta \cdot R_\tau = R_{\theta+\tau} = R_\tau \cdot R_\theta$

<u>Olkoon $m=2$</u>. $\boxed{\supset}$ Selvä $\pm I \in SO(4)$ ja $\pm I \in Z(SO(4))$

$\boxed{\subset}$ Olkoon $g \in Z(SO(4))$. Eli $g \in SO(4)$ ja

$$gh = hg \quad \forall h \in SO(4) \qquad (*)$$

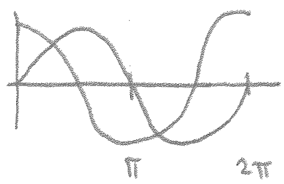
$\Rightarrow gh = hg \quad \forall h \in T =$ SO(4):n standardi maksimaalinen torus

$$\overset{L9.2.2}{\Rightarrow} g \in T, \quad g = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & \\ \hline & R_\tau \end{array}\right) \qquad \theta, \tau \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g = \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\tau & \sin\tau \\ 0 & 0 & -\sin\tau & \cos\tau \end{array}\right) \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(4)$$

$$gh = hg \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta - \cos\tau & -\sin\tau \\ -\sin\theta & \cos\theta - \cos\tau & 0 & \sin\tau \\ 0 & \sin\tau & \sin\tau & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \sin\theta = \sin\tau = 0 \\ \cos\theta = \cos\tau = \pm 1 \end{array}$$



$\Rightarrow g = \pm I$

Vastaavasti $m = 3, 4, \dots$.

(2) $Z(SO(2m+1)) = \{I\} \qquad m = 0, 1, \dots$

$\underline{m=0}$ $\quad SO(1) = \{1\}$. Olkoon $m \geq 1$.

$\Rightarrow Z(SO(1)) = \{1\}$

$\underline{m=2}$ Kuten yllä: Jos $g \in Z(SO(5))$ niin

$$gh = hg \qquad \forall\ h \in SO(5)$$

ja

$$g = \left(\begin{array}{c|c|c} R_\theta & & \\ \hline & R_2 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right).$$

Kuten (1). kohdassa: $R_\theta = R_2 = \pm I$

$$\Rightarrow g = \left(\begin{array}{c|c} \pm I_{4\times 4} & \\ \hline & 1 \end{array}\right)$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(5) \qquad gh = hg \quad \Rightarrow \quad g = I.$$

Vastaavasti $m = 3, 4, \dots$.

(4) $Z(Sp(n)) = \{I, -I\}$

$g \in Z(Sp(n)) \Rightarrow$

$$g = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \qquad i \in \mathbb{H}$$

$$= \operatorname{diag}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1, \dots, \cos\theta_n + i\sin\theta_j)$$

$$jg = gj \Rightarrow \cos\theta_s\, j - k\cdot\sin\theta_s = \cos\theta_s\cdot j + k\sin\theta_s, \quad s = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sin\theta_s = 0 \qquad s = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \cos\theta_s = \sigma_s \in \{\pm 1\} \qquad s = 1, \dots, n$$

Eli $g = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g = g \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\dots \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_3$$

$$\dots \Rightarrow g = \pm I$$

(5) $Z(SU(n)) = \{ \omega \cdot I \mid \omega^n = 1, \omega \in \mathbb{C} \}$

$\boxed{\supseteq}$ $\omega I \in SU(n)$: $\det(\omega I) = \omega^n 1 = 1$

$\mathbb{C}$ kommutatiivinen $\Rightarrow$ $\omega \cdot I \in Z(SU(n))$

$\boxed{\subseteq}$ $g \in Z(SU(n))$

$\Rightarrow$ $gh = hg$ $\quad \forall h \in SU(n)$

$\Rightarrow$ $g = \operatorname{diag}\left(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{n-1}}, e^{-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})} \right)$

$\theta_i \in [0, 2\pi)$.

$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$, $\dots$ $\Rightarrow e^{i\theta_r} = e^{i\theta_s}$ $\quad r, s \in \{1, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow$ $g = \operatorname{diag}\left(e^{i\theta}, \dots, e^{i\theta}, e^{-i(n-1)\theta} \right)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$h = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $e^{i\theta} = e^{-i(n-1)\theta}$ $\Big| \cdot e^{i(n-1)\theta}$

$\Rightarrow$ $e^{i\theta \cdot n} = 1$

$\Rightarrow$ $(e^{i\theta})^n = 1$

$\Rightarrow$ $g = \omega \cdot I$ $\qquad \omega^n = 1, \ \omega \in \mathbb{C}$ $\square$

(9.4) (Tätä Lemmaa ei tarvita tässä ratkaisussa)

Lemma: Olkoon G ryhmä, $T \subset G$ torus ja

$$\forall g \in G : [tg = gt \ \forall t \in T \Rightarrow g \in T]$$

Tällöin T on maksimaalinen torus.

Tod. Jos T ei ole max. torus löytyy torus T', $T \subsetneq T' \subset G$.
Olkoon $t' \in T'$. Tällöin $tt' = t't \quad \forall t \in T$
Tämä seuraa sillä T':n alkiot kommutoivat ja $T \subset T'$.
Oletus $\Rightarrow t' \in T \Rightarrow T = T'$ □

Väite: $T = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$ on GL_3:n maksimaalinen torus.

Huom: T:n konjugaatit eivät peitä GL_3:sta $\det g t g^{-1} = 1$. $t \in T$, $g \in GL_3$

Lemma: Olkoon T^* torus GL_3:issa. Tällöin $\det \equiv 1$ T^*:llä.

Tod. Lause 9.6.2 $\Rightarrow \exists a \in T^*$ s.e. $\{a^k\}_{k=1}^{\infty}$ tiheä T^*:ssä
T^* kompakti $\Rightarrow a^k$:lla on suppeneva osajono k_s
$\Rightarrow (\det a)^{k_s} \longrightarrow \det a^* \qquad a^{k_s} \to a^*$
$|\det a| > 1 \Rightarrow (\det a)^{k_s}$ ei suppene
$|\det a| < 1 \Rightarrow \det a^* = 0$ ↯
$\Rightarrow \det a^* = \pm 1 \Rightarrow \det a = \pm 1$
T^* polkuyhtenäinen, $I \in T^* \Rightarrow \det a = +1$

Olkoon $x \in T^* \Rightarrow \exists a_i \in T^* \begin{cases} a_i \longrightarrow x \\ \det a_i = 1 \end{cases}$

$$\det x = \det \lim_{k \to \infty} a_k \overset{\text{det jva}}{=} \lim_{k \to \infty} \det a_k = 1 \ \square$$

Olkoon $T^* \subset GL_3$ maksimaalinen torus s.e.

$T \subseteq T^*$.

T^* vaihdannainen $\Rightarrow$ Jokainen $s \in T^*$ kommutoi T:n alkioiden kanssa

V. $T^* = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I & \\ & 1/\lambda^2 \end{pmatrix} \cdot t \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ t \in T \right\}$

Tod Olkoon $g \in T^*$ mielivaltainen.

Kirjoitetaan $g = \begin{pmatrix} A & v^T \\ u & \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^2$, $A \in M_2(\mathbb{R})$

$$tg = gt \quad \forall t \in T \Rightarrow \begin{cases} R_\theta \cdot A = A R_\theta \\ R_\theta v^T = v^T \\ R_\theta \cdot u = u \end{cases} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$$

Eli $u = v = 0$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$\det A = \alpha \det A = 1 \Rightarrow \det A = a^2 + b^2 \neq 0$

$$A = \underbrace{(a^2+b^2)}_{=:\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}}_{= R_\theta \text{ jollain } \theta}$$

$$\alpha = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Olkoon $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $a = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \lambda I & \\ \hline & 1/\lambda^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & \\ \hline & 1 \end{array} \right)}_{= \left(\begin{array}{c|c} \lambda R_\theta & \\ \hline & 1/\lambda^2 \end{array} \right) \in T^*} \in T^*$.

$$a^k \in T^* \ \forall k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \lambda^k R_{k\theta} & \\ \hline & \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^k \end{array} \right) \in T^*$$

T^* kompakti $\Rightarrow$ $(1/\lambda^2)^k$:lla on suppeneva osajono

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = \pm 1$: $a = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \in T$ tai

$a = \left(\begin{array}{c|c} R_{\theta+\pi} & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \in T$. $T^* \subset T$ $\square$

(9.5) T_i maksimaalinen torus G_i:ssä $i=1,2$

V. $T_1 \times T_2$ maksimaalinen torus $G_1 \times G_2$:ssa

Tod. Tehdään vastaoletus:

Löytyy (maksimaalinen) torus $T^* \subset G_1 \times G_2$ s.e.

$$T_1 \times T_2 \subsetneq T^*$$

Eli: löytyy $(\xi,\eta) \in T^*$ mutta $(\xi,\eta) \notin T_1 \times T_2$

Kolme vaihtoehtoa: 1° $\xi \notin T_1$, $\eta \in T_2$ 2° $\xi \in T_1$, $\eta \notin T_2$ 3° $\xi \notin T_1$ ja $\eta \notin T_2$

Oletetaan tässä, että $\xi \notin T_1$ (tapaus $\eta \notin T_2$ menee analogisesti.)

Määritellään projektio $G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1$:

$$\pi : GL_n \times GL_m \longrightarrow GL_n \qquad G_1 \subset GL_n$$
$$(a,b) \longmapsto a \qquad G_2 \subset GL_m$$

Huom: π on jatkuva.

$$S := \pi(T^*)$$
$$= \{ a \in G_1 \mid (a,b) \in T^* \text{ jollain } b \in G_2 \}$$

Kohta näytetään S on G_1:n torus.

$$T_1 \times T_2 \subset T^* \Rightarrow T_1 \subset \pi(T^*) = S$$
$$(\xi,\eta) \in T^* \Rightarrow \xi \in \pi(T^*) = S, \ \xi \notin T_1$$
$$\therefore \ S \text{ on torus jolle } T_1 \subsetneq S \quad \lightning \ T_1 \text{ maks. torus.}$$

<u>Väite 1</u> S on G_1:n aliryhmä

$(id_1, id_2) \in T^* \Rightarrow id \in S$; $a,b \in S \Rightarrow (a,x),(b,y) \in T^*$
$\Rightarrow (ab, xy) \in T^*$
$\Rightarrow ab \in S$

$a \in S \Rightarrow (a,x) \in T^*, (a^{-1}, x^{-1}) \in T^*$
$\Rightarrow a^{-1} \in S.$ $\square$

<u>Väite 2</u> S on kompakti matriisiryhmä.

<u>Topologinen Lemma:</u> Olkoon X, Y, Z topologisia avaruuksia. $Y \subseteq Z$ ja Y:llä on Z:n relatiivitopologia.

Jos $f: X \to Y$ on jatkuva niin

$f: X \to Z$ on jatkuva.

<u>Tod.</u> Olkoon $A \overset{\circ}{\subset} Z$.

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid \overbrace{f(x)}^{\in Y} \in A\}$$
$$= \{x \in X \mid f(x) \in A \cap Y\}$$
$$= f^{-1}(\underbrace{A \cap Y}_{\overset{\circ}{\subset} Y:\text{ssä}}) \quad \overset{\circ}{\subset} X:\text{ssä} \qquad \square$$

<u>Tod. (Väite 2)</u> $f: T^N \to T^*$ jva

$\Rightarrow f: T^N \to GL_n \times GL_m$ jva

T^N kompakti $\Rightarrow f(T^N) = T^*$ kompakti $GL_n \times GL_m$

$\Rightarrow \pi(T^*) = S$ —"— :ssä.

$\overset{\pi \text{ jva}}{\Rightarrow}$ S kompakti $\square$

Hausdorff avaruudessa kompakti osajoukko on suljettu $\Rightarrow$ S on suljettu $GL_n \times GL_m$:ssä $\square$

<u>Väite 3</u> (1) S on vaihdannainen ja (2) polkuyhtenäinen.

<u>Tod</u> (1) T^* on vaihdannainen

$S \times \{I\}$ on T^* aliryhmä

(2) T^* on polkuyhtenäinen

$\underset{\pi: T^* \to S \text{ jva}}{\Rightarrow}$ S on polkuyhtenäinen.

Lause 9.1.3 Kompakti, vaihdannainen, ja p.yhtenäinen on isom T^N:n kanssa. $\square$

(9.6) $A \in \mathfrak{u}(n)$. Tällöin

$$\det e^A = e^{\operatorname{trace} A}$$

Tod. Lause 9.4.1:

$$\exists\, g \in U(n) \text{ s.e. } \quad g \cdot A g^{-1} = \operatorname{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n)$$

joillakin $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\det e^A &= \det e^{gAg^{-1}} \\
&= \det e^{\operatorname{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n)} \\
&= \det \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \\
&= e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} \\
&= e^{\operatorname{trace} \operatorname{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n)} \\
&= e^{\operatorname{trace} g^{-1} \operatorname{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n) \cdot g} \\
&= e^{\operatorname{trace} A}. \qquad \square
\end{aligned}$$