Lien ryhmät ja monistot Harj. 4.

4.1 a) $SO(n)$ on avoin ja suljettu $O(n)$:ssä

Kuvaus $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva joten

$$\det^{-1}(\underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}}_{\text{avoin } \mathbb{R}\text{:ssä}}) \text{ on avoin } M_n(\mathbb{R})\text{:ssä}$$

$$\det^{-1}(+1) \text{ on suljettu } M_n(\mathbb{R})\text{:ssä}$$

Jos $A \in O(n)$ pätee $\det A = \pm 1$. Sitten

$$SO(n) = O(n) \cap \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\} \rightsquigarrow \text{on suljettu}$$
$$= O(n) \cap \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \rightsquigarrow \text{on avoin} \quad \square$$

b) $O(n)^- = \{A \in O(n) \mid \det A = -1\}$ on avoin ja suljettu $O(n)$:ssä.

Vastaavasti:

$$O(n)^- = O(n) \cap \overbrace{\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}}^{\text{suljettu } M_n(\mathbb{R})\text{:ssä}}$$
$$= O(n) \cap \underbrace{\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}}_{\text{avoin } M_n(\mathbb{R})\text{:ssä}} \quad \square$$

4.2 Matriisi $A \in M_n(\mathbb{K})$ on yläkolmiomatriisi jos se on muotoa

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & * \end{pmatrix}$$

eli $A_{ij} = 0$ kun $i > j$.

<u>Väite</u>: $UT_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ on yläkolmiomatriisi}\}$ on matriisiryhmä.

<u>Tod.</u> $UT_n(\mathbb{K})$ on aliryhmä:

- $Id \in UT_n(\mathbb{K})$.
- $A, B \in UT_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in GL$ sillä $\det AB \neq 0$
  $\Rightarrow AB \in UT_n(\mathbb{K})$

Olkoon $i > k$ ja

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \neq 0$$

$A_{ij} \neq 0, B_{jk} \neq 0 \Rightarrow i \leq j$, $j \leq k$

$\Rightarrow i \leq k$ & $i > k$ ↯

• $A \in UT_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} \in UT_n(\mathbb{K})$. (*)

Todistus induktiolla:

$\underline{n=1}$ $A = (\alpha) \Rightarrow A^{-1} = (\alpha^{-1})$

$\underline{n \Rightarrow n+1}$ Oletetaan, että (*) pätee arvolla n.

Jos $A \in UT_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, $u \in \mathbb{K}^n$ niin

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ 0 & A \end{pmatrix} \in UT_n(\mathbb{K}) \quad (\text{Pätee: } \det A' = \alpha \cdot \det A)$$

Aset. $B = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} u \cdot A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in UT_n(\mathbb{K})$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} u \cdot A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & u \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} u \cdot A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \square$$

<u>Väite:</u> $UT_n(\mathbb{K})$ on suljettu $GL_n(\mathbb{K})$:ssa.

Olkoon $c_{ij} : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ matriisin komponenttifunktioita.
$\qquad A \longmapsto A_{ij}$

$$UT_n(\mathbb{K}) = \underbrace{\underbrace{c_{21}^{-1}(0) \cap \dots \cap c_{n1}^{-1}(0) \cap \dots \cap c_{n\,n-1}^{-1}(0)}_{\text{alkiot diagonaalin alla } = 0}}_{= \text{ suljettu } M_n(\mathbb{K})\text{:ssa}} \cap \underbrace{\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})}_{GL_n(\mathbb{K})}$$

$\Rightarrow UT_n(\mathbb{K})$ suljettu $GL_n(\mathbb{K})$:ssa. $\square$

<u>Väite:</u> $UT_n(\mathbb{K})$ ei suljettu $M_n(\mathbb{K})$:ssa

Esim $\varepsilon I \in UT_n(\mathbb{K})$ $\forall \varepsilon > 0$ mutta $0 \notin UT_n(\mathbb{K})$.

(4.3) Olkoon $A \in SO(3) \setminus \{I\}$

Olkoon x, λ om. vektori & arvo A:lle

$$x \cdot A = \lambda x$$

$\Rightarrow \bar{x} \cdot A = \bar{\lambda} \cdot x \Rightarrow$ myös $\bar{\lambda}, \bar{A}$ ovat om. arvo & vektori

Ortogonaalisen matriisin om. arvoille pätee $|\lambda| = 1$

$\Rightarrow$ A:n om. arvot ovat $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ $\theta \in (0, 2\pi)$.

$\Rightarrow$ Vastaavasti $\exists$ om. vektoria $u \in \mathbb{R}^3$, $v, \bar{v} \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{cases} u \cdot A = u & (\text{= pyöritysakseli}) \\ v \cdot A = e^{i\theta} v, & \bar{v} \cdot A = e^{-i\theta} \bar{v} \end{cases}$$

Aseta: $e_1 = \operatorname{Re} v = \frac{1}{2}(v + \bar{v})$, $e_2 = \operatorname{Im} v = \frac{1}{2i}(v - \bar{v})$

$$v = e_1 + i e_2, \qquad \bar{v} = e_1 - i e_2$$

Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ niin

$$(\alpha e_1 + \beta e_2) \cdot A = \frac{\alpha}{2}(v \cdot A + \bar{v} \cdot A) + \frac{\beta}{2i}(v \cdot A - \bar{v} \cdot A)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(e^{i\theta}(e_1 + i e_2) + e^{-i\theta}(e_1 - i e_2)\right)$$

$$+ \frac{\beta}{2i}\left(e^{i\theta}(e_1 + i e_2) - e^{-i\theta}(e_1 - i e_2)\right)$$

$$= e_1\left(\alpha \underbrace{\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}_{= \cos\theta} + \beta \underbrace{\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}_{= \sin\theta}\right)$$

$$+ e_2\left(\alpha \underbrace{i \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}_{= -\sin\theta} + \beta \underbrace{\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}_{= \cos\theta}\right)$$

$$= (\alpha \ \beta) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Ortogonaalisille matriiseille pätee: Jos

$v \cdot A = \lambda v$, $w \cdot A = \mu \cdot w$ $\lambda \neq \mu$ niin $v \cdot w^{\#} = 0$

$\rightsquigarrow$ $v \cdot \bar{v}^{\#} = 0$ eli

$v \cdot v^{T} = 0$, $(e_1 + ie_2) \cdot (e_1 + ie_2)$

$= |e_1|^2 - |e_2|^2 + i\,2\, e_1 \cdot e_2 = 0$

Skaalaamalla v:tä voidaan olettaa, että

joko $|e_1|^2 = 1$ tai $|e_2|^2 = 1$. Tällöin

$\{u, e_1, e_2\}$ on $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta.

[$u \cdot e_i = 0$ sillä $u \cdot v^{\#} = 0 \Rightarrow u \cdot e_1 + i\, u \cdot e_2 = 0$]

$\Rightarrow$ Merk. $e_3 = u$

$$w \cdot A = \Big((e_1 \cdot w) e_1 + (e_2 \cdot w) e_2 + (e_3 \cdot w) e_3 \Big) \cdot A$$

$$= \Big((w \cdot e_1) e_1 + (w \cdot e_2) e_2 \Big) \cdot A + w \cdot e_3\, e_3$$

$$= (w \cdot e_1 \quad w \cdot e_2 \quad w \cdot e_3) \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$= w \cdot \underbrace{(e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3)}_{E \text{ ortogonaali } E^T = E^{-1}.} \cdot \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline e_3 \end{array} \right)$$

Asetaan $A_t = E \left(\begin{array}{c|c} R_{\theta t} & \\ \hline & 1 \end{array} \right) E^T$

$A_t \in SO(3)$ $\forall t$, $A_0 = I$, $A_1 = A$.

$\rightsquigarrow$ $SO(3)$ polkuyhtenäinen. $\square$

(4.4) $T_A G = \{ \gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G,\ \gamma'(0) = A \}$

$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ G:n käyrä voi esittää muodossa $\gamma = A \circ \eta$

$\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$

$= \{ (A \circ \eta)'(0) \mid \eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G,\ (A \circ \eta)' = A \}$

$= \{ A \eta'(0) \mid \eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G,\ \eta'(0) = I \}$

$= \{ AB \mid B \in g(G) \}$

$= A \cdot g(B).$ Vastaavasti $T_A G = g(B) \cdot A$ $\square$

(4.5) a) Muistutus:

Jos $(a,b,c,d) \in \mathbb{H}$ niin $\Phi_1 = \begin{pmatrix} r & s \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ $\quad r = a+ib$, $s = c+id$

Jos $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{H})$, niin $\Phi_n(A) = \left(\Phi_1(a_{ij}) \right)_{ij}$

Olkoon $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M_n(\mathbb{H})$ differentioituva. Tällöin

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det_{\mathbb{H}} \gamma(t) \underset{\text{det. määr.}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det \underbrace{\Phi_n \circ \gamma(t)}_{\in M_{2n}(\mathbb{C})}$$

$$\underset{\text{Lause 5.2.5}}{=} \operatorname{trace} \Phi_n \circ \gamma'(0)$$

diagonaalilohkot

$$= \operatorname{trace} \Phi_1 \circ \gamma_{11}'(0) + \dots + \operatorname{trace} \Phi_1 \circ \gamma_{nn}'(0)$$

$$= (\gamma_{11} + \overline{\gamma_{11}})'(0) + \dots + (\gamma_{nn} + \overline{\gamma_{nn}})'(0) = 2 \cdot \operatorname{Trace} \operatorname{Re} \gamma'(0)$$

missä $\operatorname{Re}(a,b,c,d) = a = \frac{1}{2}\left((a,b,c,d) + \overline{(a,b,c,d)}\right).$ $\square$

$$\text{(4.5) b)} \quad \overbrace{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})}^{= SL_n(\mathbb{H})\text{:n Lien algebra}} = \underbrace{\{A \in M_n(\mathbb{H}) \mid \operatorname{trace} \operatorname{Re} A = 0\}}_{= \text{vinosymplektiset matriisit.}}$$

$\boxed{\subset}$ Olkoon $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow SL_n(\mathbb{H}) = \{A \in GL_n(\mathbb{H}) \mid \det_{\mathbb{H}} A = +1\} \\ \gamma(0) = I, \quad \gamma'(0) = A \end{cases}$$

$$\overset{a)}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{\det_{\mathbb{H}} \gamma(t)}_{\equiv 1}}_{=0} = 2 \operatorname{trace} \operatorname{Re} \underbrace{\gamma'(0)}_{=A}$$

$$\Rightarrow \operatorname{trace} \operatorname{Re} A = 0$$

$\boxed{\supset}$ Olkoon $A \in M_n(\mathbb{H})$, $\operatorname{trace} \operatorname{Re} A = 0$

Määritellään $\qquad \eta(t) = I + tA$

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow SL_n(\mathbb{H})$$
$$t \longmapsto \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\det \eta(t)}, 1, \dots, 1\right) \cdot \eta(t)$$

$$\left[\det\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\det \eta(t)}, 1, \dots, 1\right) \cdot \eta(t)\right) = \det \operatorname{diag}(\dots) \cdot \det \eta(t) = 1 \right]$$

<u>Lisäksi:</u> $\qquad \gamma(0) = I$

$$\gamma'_{ij}(0) = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\det \eta(t)}, 1, \dots, 1\right)_{ik} \eta_{kj}(t) \right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \operatorname{diag}\big(-2 (\det \eta(0)) \underbrace{(\det \eta)'(0)}_{= 2 \operatorname{trace} \operatorname{Re} \eta'(0) = 2 \operatorname{trace} \operatorname{Re} A \overset{\downarrow}{=} 0}, 0, \dots, 0 \big)_{ik} \eta_{kj}(0)$$

$$+ \underbrace{\operatorname{diag}\Big(\frac{1}{\underbrace{\det \eta(0)}_{=1}}, 1, \dots, 1 \Big)_{ik}}_{= \delta_{ik}} \underbrace{\eta_{kj}'(t)}_{= A_{kj}}$$

$$= A_{ij}. \qquad \square$$

(4.6) $O_n(\mathbb{K}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A \cdot A^{\#} = I \}$

$\sigma_n(\mathbb{K}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A + A^{\#} = 0 \}$

<u>Väite:</u> Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin $g(O_n(\mathbb{K})) = \sigma_n(\mathbb{K})$.

<u>Tod.</u> $\boxed{\subset}$ $A \in g(O_n(\mathbb{K})) \Rightarrow A = \gamma'(0)$ jollain

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O_n(\mathbb{K}), \quad \gamma(0) = I$

$\gamma \cdot \gamma^{\#} = I \Rightarrow \gamma'(0)\gamma^{\#}(0) + \gamma(0)\gamma'^{\#}(0) = 0$

$\Rightarrow A + A^{\#} = 0 \Rightarrow A \in \sigma_n(\mathbb{K})$

$\boxed{\supset}$ Jos $A \in \sigma_n(\mathbb{K})$ niin $\varrho_n(A) + \varrho_n(A^{\#}) = 0$

$\overset{\text{Lemma alla}}{\Rightarrow} \varrho_n(A) + \varrho_n(A)^T = 0$

$\Rightarrow \varrho_n(A) \in \sigma_{2n}(\mathbb{R}) = g(O_{2n}(\mathbb{R}))$ tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O_{2n}(\mathbb{R})$ s.t. $\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = \varrho_n(A)$

$\gamma \cdot \gamma^T = I \ \forall t \Rightarrow \gamma'(0)\gamma^T(0) + \gamma(0)\gamma'^T(0) = 0$

$\Rightarrow \varrho_n(A) + (\varrho_n(A))^T = 0$

$\Rightarrow \varrho_n(A) + \varrho_n(A^{\#}) = 0 \qquad | \varrho_n^{-1}$, ϱ_n lin

$\Rightarrow A \in O_n(\mathbb{K})$.

<u>Lemma:</u> Jos $A \in M_n(\mathbb{C})$ niin

$$\varrho_n(A^{\#}) = \varrho_n(A)^T$$

<u>Tod:</u>

<u>$n=1$:</u> $\varrho_1(\overline{a+ib}) = \varrho_1(a-ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^T = (\varrho_1(\cdot\cdot))^T$

<u>$n>1$</u> $\varrho_n(A^{\#})_{ij\text{:s lohko}} = \varrho_1(\overline{A_{ji}}) = (\varrho_1(A_{ji}))^T$

$\varrho_n(A)^T_{ij\text{:s lohko}} = (\varrho_1(A_{ji}))^T \qquad \square$

<u>Lemma</u> Jos $A \in M_n(\mathbb{H})$ niin

$$\Phi_n(A^{\#_{\mathbb{H}}}) = \Phi_n(A)^{\#_{\mathbb{C}}}$$

<u>Tod</u> <u>$n=1$</u> $A = (a,b,c,d) \in \mathbb{H}$

$$\Phi_1(a,-b,-c,-d) = \begin{pmatrix} r & s \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix} \quad \text{missä} \quad \begin{matrix} r = a - ib \\ s = -(c+id) \end{matrix}$$

$$\Phi_1(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -(c-id) & a-ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r} & -s \\ \bar{s} & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix}^{\#_{\mathbb{C}}}$$

$$\Phi_1(A)^{\#_{\mathbb{C}}} = \begin{pmatrix} r & s \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix} \quad \square$$

<u>$n>1$</u>

$$\Phi_n(A^{\#})\Big|_{ij\text{:s lohko}} = \Phi_1((A^{\#})_{ij})$$
$$= \Phi_1(\overline{A_{ji}})$$
$$\overset{n=1}{=} \left(\Phi_1(A_{ji})\right)^{\#}$$

$$\left(\Phi_n(A)\right)^{\#}\Big|_{ij\text{:s lohko}} = \left(\Phi_n(A)\right)^{\#}_{ji\text{:s lohko}}$$
$$= \Phi_1(A_{ji})^{\#}$$