$f(0) = 1$ ja $f'(t) = f(t)\,\mathrm{trace}\,A$

1-kl. ratk.: $f(t) = e^{t\,\mathrm{trace}\,A}$

erityisesti $f(1) = \det e^{A} = e^{\mathrm{trace}\,A}$. □.

Aikaisemmin $A \in gl_n(\mathbb{K})$ liittyvälle polulle saatiin useita geometrisia ja analyyttisiä ominaisuuksia. Sillä on myös keskeinen algebrallinen ominaisuus: sen kuvajoukko on $GL_n(\mathbb{K})$:n aliryhmä. Merk. $(\mathbb{R}, +)$ reaalilukujen ryhmä varustettuna yhteenlaskulla.

<u>Määritelmä</u> Matriisiryhmän G <u>1-parametriryhmä</u> on differentioituva ryhmähomomorfismi $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to G$.

<u>Huom</u> yllä homomorfismi: $\gamma(t_1 + t_2) = \gamma(t_1)\gamma(t_2)$.

1-param. ryhmä yhtäaikaa algebrallinen objekti (homomorfismi) ja geometrinen objekti (differentioituva polku).

6.8.6. <u>Lause</u>

(1) $\forall\ A \in gl_n(\mathbb{K})$, $\gamma(t) := e^{tA}$ on 1-parametriryhmä

(2) $\forall$ $GL_n(\mathbb{K})$:n 1-parametriryhmä on muotoa $\gamma(t) = e^{tA}$ jollakin $A \in gl_n(\mathbb{K})$.

Tod: (1) 6.3.1 $\Rightarrow$ $\mathcal{X}(t_1+t_2) = e^{t_1A + t_2A} = e^{t_1A}e^{t_2A}$
$= \mathcal{X}(t_1)\mathcal{X}(t_2)$

Huom: $\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(-t) = I \Rightarrow \mathcal{X}(t)^{-1} = \mathcal{X}(-t)$

(2): Ol. $\mathcal{X}$ 1-param. ryhmä $GL_n(\mathbb{K})$:lla.
Ok. $A := \mathcal{X}'(0)$. $\forall t \in \mathbb{R}$ pätee:

$$\mathcal{X}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\mathcal{X}(t+h) - \mathcal{X}(t)\right) = \mathcal{X}(t) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\mathcal{X}(h) - I_n\right)$$

$$= \mathcal{X}(t)\mathcal{X}'(0) = \mathcal{X}(t)A \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ arvaus $\mathcal{X}(t) = e^{tA}$

Tulon derivoimissääntö $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{X}(t)e^{-tA}\right) = \mathcal{X}'(t)e^{-tA} + \mathcal{X}(t)\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \mathcal{X}(t)Ae^{-tA} - \mathcal{X}(t)Ae^{-tA} \equiv 0.$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{X}(t)e^{-tA}$ = vakio $= \mathcal{X}(0) = I$ $\Rightarrow$ $\mathcal{X}(t) = e^{tA}$. $\square$.

6.3.7. Lause $\forall$ $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ja $B \in M_n(\mathbb{K})$
pätee $e^{ABA^{-1}} = Ae^{B}A^{-1}$.

Tod: $Ae^BA^{-1} = A\left(I + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right)A^{-1}$

$$= I + ABA^{-1} + \frac{1}{2}AB^2A^{-1} + \frac{1}{6}AB^3A + \dots$$

$$= I + ABA^{-1} + \frac{1}{2}(ABA^{-1})^2 + \frac{1}{6}(ABA^{-1})^3 + \dots$$

$$= e^{ABA^{-1}}.$$

7. Matriisiryhmät monistoina

7.1. Eksponenttikuvauksen rajoittuma Lien algebraan

Selvitetään, kuinka eksponenttikuvaus rajoittuu Lien algebraan.

Merk $B_r := \{ W \in M_n(\mathbb{K}) \mid |W| < r \}$ origokeskinen avoin kuula

7.1.1. Lause Ol. $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ matriisiryhmä ja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ sen Lien algebra.

(1) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $e^X \in G$

(2) Riittävän pienillä $r > 0$, $V := \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ on

I:n ympäristö (= G:n avoin joukko, joka sis. I:n) ja

rajoittumakuvaus $\exp|_{B_r \cap \mathfrak{g}} : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ on homeomorfismi

Huom (1) ⇒ jos 1-parametriryhmä alkaa tangentiaalisesti matriisiryhmälle G, niin se on kokonaan G:ssä. Edellä tämä nähtiin tapauksissa
$G \in \{ GL_n(\mathbb{K}), O_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C}), SU(n) \}$
eri todistukset kussakin tapauksessa. Yleistys?

(2) ei päde vielä yhdelekään matriisiryhmälle. Nähdään, että kuvaus on itse asiassa diffeomorfismi.

Heuristinen idea: $T_aG = a\mathfrak{g} = \{ aX \mid X \in \mathfrak{g} \}$, kiinnitetään $X \in \mathfrak{g}$. Tark. vektorikenttää $\mathcal{V} : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ se.
$\mathcal{V}(a) := a \cdot X$. G:n pisteissä tämä v.k. tangentiaalinen G:lle. Polku $\gamma(t) = e^{tX}$ on $\mathcal{V}$:n integraalikäyrä, sillä $\gamma'(t) = \gamma(t) \cdot X = \mathcal{V}(\gamma(t))$. Koska $\gamma(0) = I \in G$, niin näyttää siltä että $\gamma(t) \in G$.

Tämä päättely OK monistoille, mutta siitähän juuri ei vielä ole näyttöä (eikä edes määritelmää), joten ...

Tod: 7.1 (1): Olk. $\{\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k\}$ $\mathfrak{g}$:n kanta. Valitaan $\forall i = 1, \dots, k$ differentioituva polku $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ s.e. $\alpha_i(0) = I$, $\alpha_i'(0) = \underline{X}_i$. (7.2.)

Määrit. $F_{\mathfrak{g}} : (0\text{:n ympäristö } \mathfrak{g}\text{:ssä}) \to G \subset M_n(\mathbb{K})$ asettamalla
$\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^k$

$$F_{\mathfrak{g}}(c_1\underline{X}_1 + \dots c_k\underline{X}_k) = \alpha_1(c_1) \cdot \alpha_2(c_2) \cdots \alpha_k(c_k).$$

Nyt $F_{\mathfrak{g}}(0) = I$ ja $d(F_{\mathfrak{g}})_0 = id_{\mathfrak{g}}$:

Suunnattu derivaatta 0:ssa kantavektorin $\underline{X}_i$ suuntaan:

$$d(F_{\mathfrak{g}})_0(\underline{X}_i) = \lim_{t \to 0} \frac{F_{\mathfrak{g}}(t\underline{X}_i) - F_{\mathfrak{g}}(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha_i(t) - I}{t}$$
$$= \alpha_i'(0) = \underline{X}_i \quad \forall i = 1, \dots, k \qquad \text{(ent. jatkuna)}$$

$\Rightarrow d(F_{\mathfrak{g}})_0 = id_{\mathfrak{g}}$.

Muodostetaan aliavaruus $\mathfrak{p} \subset M_n(\mathbb{K})$ täydentämällä $\mathfrak{g}$ $M_n(\mathbb{K})$:n kannaksi s.e. $M_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{g} \times \mathfrak{p}$. Muodostetaan funktio

$F_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to M_n(\mathbb{K})$ s.e. $F_{\mathfrak{p}}(0) = I$ ja $d(F_{\mathfrak{p}})_0(V) = V$ $\forall V \in \mathfrak{p}$.

Esim. funktio $F_{\mathfrak{p}}(V) := I + V$ kelpaa. Muodostetaan

$F : (0\text{:n ymp. joukossa } \mathfrak{g} \times \mathfrak{p} = M_n(\mathbb{K})) \to M_n(\mathbb{K})$ säännöstä

$$F(\underline{X} + \underline{Y}) = F_{\mathfrak{g}}(\underline{X}) F_{\mathfrak{p}}(\underline{Y}) \quad \forall \underline{X} \in \mathfrak{g}, \underline{Y} \in \mathfrak{p}.$$

Pätee: $F(0) = I$ ja $dF_0 = id_{M_n(\mathbb{K})}$.

Sovelletaan F:n <u>käänteiskuvauslausetta</u>: Jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^r $(r \geq 1)$ pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä ja df_x on kääntyvä lineaarikuvaus (eli $J_f \neq 0$), niin löytyy (mahdollisesti pienempi) x:n ympäristö U s.e. $V := f(U)$ on $f(x)$:n ympäristö ja kuvauksella $f|_U : U \to V$ on C^r käänteiskuvaus.

Saadaan: F:llä on pisteen $I \in M_n(\mathbb{K})$ ympäristössä U käänteiskuvaus:

Olkoon $F^{-1}(a) = u(a) + v(a) \in U \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{p}$, kun $a \in F(U) \subset M_n(\mathbb{K})$.

Pätee: $u(F(\underline{X}+\underline{Y})) = \underline{X}$ ja $v(F(\underline{X}+\underline{Y})) = \underline{Y}$

$\forall\, \underline{X} \in \mathfrak{g}, \underline{Y} \in \mathfrak{p}$ O:n lähellä l. kun $\underline{X}+\underline{Y} \in U$.

<u>Huom.</u> v testaa onko I:n lähellä oleva alkio

$a \in F(U)$ G:ssä: $v(a) = 0 \Rightarrow a \in G$.

Olk. $\underline{X} \in \mathfrak{g}$ ja aset. $a(t) = e^{t\underline{X}}$. Osoitetaan, että

$a(t) \in G$ pienillä t näyttämällä, että pätee $v(a(t)) = 0$.

Koska $v(a(0)) = v(I) = 0$ riittää os. $\frac{d}{dt}\big(v(a(t))\big) = 0$

pienillä t: Pätee:

$$\frac{d}{dt}\big(v(a(t))\big) = dv_{a(t)}(a'(t)) = dv_{a(t)}(\underline{X} \cdot a(t)).$$

Väite seuraa seuraavasta lemmasta:

7.1.2. <u>Lemma</u> $\forall\, a \in M_n(\mathbb{K})$, jotka lähellä I:tä $(a \in F(U))$

ja $\forall\, \underline{X} \in \mathfrak{g}$ pätee $dv_a(\underline{X} \cdot a) = 0$.

<u>Tod:</u> Esitetään: $a = F(Z + \underline{Y})$, $Z \in \mathfrak{g}$ ja $\underline{Y} \in \mathfrak{p}$.

$\forall\, W \in \mathfrak{g}$ ja riittävän pienillä t $(Z + tW + \underline{Y} \in U)$ pätee

$v(F_{\mathfrak{g}}(Z + tW) F_{\mathfrak{p}}(\underline{Y})) = \underline{Y}$, eli v ei muutu

näihin suuntiin.

$\Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi\left(F_{\mathfrak{g}}(Z+tW)\cdot F_{\mathfrak{p}}(\Xi)\right) = d\varphi_a\left(d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W)\cdot F_{\mathfrak{p}}(\Xi)\right)$$

$a = F_{\mathfrak{g}}(Z)F_{\mathfrak{p}}(\Xi)$

$$\stackrel{\downarrow}{=} d\varphi_a\left(d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W)\cdot F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1}a\right) = d\varphi_a(X\cdot a), \text{ missä}$$

$$X := d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W)\cdot F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1}.$$

Riittää os. $X \in \mathfrak{g}$ m.v.

Selvästi $X \in \mathfrak{g}$, sillä se on G:n polun $t \mapsto F_{\mathfrak{g}}(Z+tW)F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1}$ tangenttivektori alkuhetkellä $t=0$. X m.v., sillä

lin. kuvaus $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : W \mapsto (d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W))F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1}$ on

$id_{\mathfrak{g}}$ kun $Z=0$, joten sen matriisin determinantti ≈ 1

kun $|Z|$ pieni ja siis isomorfismi. W voidaan siis

valita s.e. X on $\mathfrak{g}$:n m.v. alkio $\square$.

Saatiin: Jos $X \in \mathfrak{g}$, niin $e^{tX} \in G$ pienillä $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Tulos jatkuu tanssa(?) $\forall t \in \mathbb{R}$: olk. $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ ja $N \in \mathbb{N}$

$$e^{NtX} = e^{tX + \dots + tX} = e^{tX}e^{tX}\cdots e^{tX} \in G. \quad \square.$$

Pätee: m.v. potenssisarja määrää sileän funktion joukossa

$\{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid |A| < \text{supp. säde}\}$. Erityisesti saadaan

7.1.3. <u>Lause</u> $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ sileä.

7.1.4. <u>Lemma</u> Riittävän pienillä $r>0$ $V := \exp(B_r)$,

$B_r = \{W \in M_n(\mathbb{K}) \mid |W| < r\}$, on I:n ymp. $GL_n(\mathbb{K})$:ssa ja

$\exp|_{B_r} : B_r \to V$ on homeomorfismi (lisäksi sileä ja jolla sileä käänteiskuvaus)

Tod: $\forall X \in M_n(\mathbb{K})$ $d(\exp)_0(X)$ on polun $t \mapsto e^{tX}$ tangenttivektori kun $t=0$ ts. $d(\exp)_0 = id_{M_n(\mathbb{K})}$. Käänteiskuvauslause + havainto: $M_n(\mathbb{K})$:n riittävän pieni I:n ympäristö $\subset GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$ väite. $\square$.

Olk. $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra. Edellä $7.1.4 \Rightarrow 7.1.1(2)$ tapauksessa $G = GL_n(\mathbb{K})$.

Yleisesti ei ilmeinen! Väite ei päde aliryhmille $G \subset GL_n(\mathbb{K})$, jotka eivät suljettuja $GL_n(\mathbb{K})$:ssa.

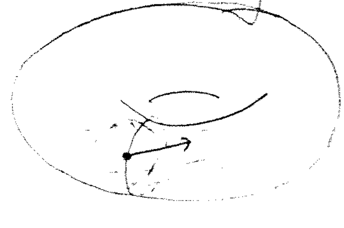
<u>Esim</u> Ol. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja asef.

$$G := \left\{ g_t = \begin{pmatrix} e^{2\pi t i} & 0 \\ 0 & e^{\lambda 2\pi t i} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset GL_2(\mathbb{C})$$

<u>Huom.</u> $f: \mathbb{R} \to G$ $f(t) = g_t$ isomorfismi mutta ei homeomorfismi. Lisäksi $\overline{G} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2\pi t i} & 0 \\ 0 & e^{2\pi s i} \end{pmatrix} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}$ joten G ei suljettu $GL_2(\mathbb{C})$:ssä.

G:n Lien algebra $\mathfrak{g} = \operatorname{span}\left\{ w = \begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & \lambda 2\pi i \end{pmatrix} \right\}$

ja $e^{tw} = g_t$ $\forall t \in \mathbb{R}$.



Kun $0 < r < \infty$ pätee:

$$\exp(\{tw \mid t \in (-r,r)\}) = \{g_t \mid t \in (-r,r)\}$$ ei ole I:n ymp. G:ssä, sillä $\forall$ I:n ymp. G:ssä sisältää muotoa g_n ($\neq g_t$ millään $t \in (-r,r)$) olevia alkioita mv. suurilla kokonaisluvuilla n.

Matriisiryhmille saadaan:

7.1.5. Lause. Ol. $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra. Lemmassa 7.1.4 voidaan $r>0$ valita s.e. $\exp(B_r \cap \mathfrak{g}) = \exp(B_r) \cap G$.

Huom. $\forall r>0$ inkluusio $\exp(B_r \cap \mathfrak{g}) \subset \exp(B_r) \cap G$ selvä.

Ongelma (kuten esim. yllä): G:ssä alkioita, jotka mv. lähellä I-alkiota ja exp-funktion kuvia mv. lyhyistä $M_n(\mathbb{K})$:n vektoreista mutta samaan aikaan exp-funktion kuvia vain hyvin pitkistä $\mathfrak{g}$:n vektoreista.

Tod: Val. v.o.a. $\mathfrak{p} \subset M_n(\mathbb{K})$ joka komplementaarinen $\mathfrak{g}$:lle, jolloin $M_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{g} \times \mathfrak{p}$. Määrit. funktio

$$\Phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{p} \to M_n(\mathbb{K}) \text{ s.e. } \Phi(X+Y) = e^X e^Y \quad \forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{p}.$$

Huom. $\Phi|_\mathfrak{g} = \exp|_\mathfrak{g}$. Lisäksi $d\Phi_0 = d(\exp)_0 = id_{M_n(\mathbb{K})}$ erityisesti siis Φ kääntyvä 0:n ympäristössä.

Ol. Lauseen 7.1.5 väite väärä. Tällöin löytyy jono vektoreita $\{A_1, A_2, \dots\} \subset M_n(\mathbb{K})$, $A_j \neq 0$ s.e. $|A_i| \to 0$ $A_i \notin \mathfrak{g}$ ja $\Phi(A_i) \in G$ $\forall i$. Kirj. $A_i = X_i + Y_i$, $X_i \in \mathfrak{g}$ ja $0 \neq Y_i \in \mathfrak{p}$. $\forall i$ aset. $g_i = \Phi(A_i) = e^{X_i} e^{Y_i} \in G$

$$e^{Y_i} = (e^{X_i})^{-1} g_i \in G$$

$\{X \in \mathfrak{g} \mid |X| = 1\}$ kompakti, joten jonolla $\left\{\frac{Y_1}{|Y_1|}, \frac{Y_2}{|Y_2|}, \dots\right\}$ oltava suppeneva osajono $\to Y \in \mathfrak{p}$. Ol. A_i valittu (uudelleen) s.e. $\frac{Y_i}{|Y_i|} \to Y$. Olk. $t \in \mathbb{R}$. Koska $|Y_i| \to 0$ voidaan valita positiiviset kokonaisluvut n_i s.e. $n_i Y_i \to tY$

Tästä: $e^{n_i Y_i} = (e^{Y_i})^{n_i} \in G$, G suljettu $GL_n(\mathbb{K})$:ssa

$\Rightarrow e^{tY} \in G$. $\therefore e^{tY} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}$ $\lightning$ sillä $Y \notin \mathfrak{g}$. □.

Tod: 7.1.1.(2) Ol $r > 0$ kuten lauseessa 7.1.5. Nyt

$V = \exp(B_r \cap \mathfrak{g}) = \exp(B_r) \cap G$ on I:n ysto G:ssä, sillä $\exp(B_r)$ I:n ysto $M_n(\mathbb{K})$:ssa (L. 7.1.4).

$\exp|_{B_r \cap \mathfrak{g}} : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ jatkuva. Sen käänteiskuvaus $\log|_V : V \to B_r \cap \mathfrak{g}$ on jatkuvan funktion $\log : \exp(B_r) \to B_r$ rajoittumakuvauksena jatkuva. □.

7.2. Monistot

Ol. $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}^n$. Jos X ei avoin $\mathbb{R}^m$:ssä, mitä tarkoittaa f sileä?

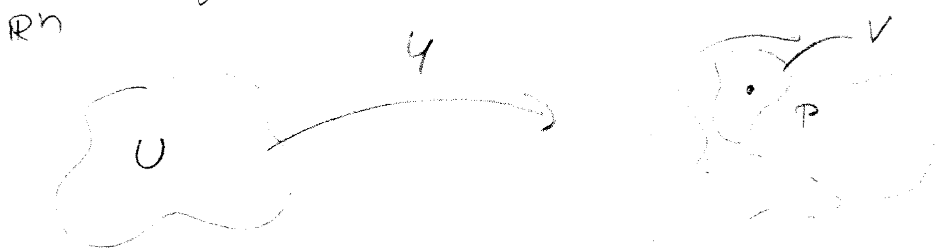
Määritelmä: Kuvaus $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$ on sileä jos $\forall p \in X$ $\exists$ p:n ysto U $\mathbb{R}^m$:ssä ja sileä funktio $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^n$ s.e. $f|_{U \cap X} = \tilde{f}|_{X \cap U}$.

<u>Määritelmä</u> $X \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$ ovat <u>diffeomorfiset</u> jos löytyy sileä bijektio $f: X \to Y$, jonka käänteisfunktio on sileä. Tällöin f on <u>diffeomorfismi</u>

<u>Huom</u> Lauseessa 7.1.1(2) 'homeomorfismi' voidaan korvata sanalla 'diffeomorfismi'

<u>Määritelmä</u> Joukko $X \subset \mathbb{R}^m$ on <u>n-monisto</u>, jos $\forall p \in X$ $\exists$ ympäristö V X:ssä, joka diffeomorfinen avoimen joukon $U \subset \mathbb{R}^n$ kanssa.

Jos pitää os. $X \subset \mathbb{R}^m$ monisto on $\forall p \in X$ konstruoitava <u>parametrisointi</u> eli diffeomorfismi $\varphi: U \to V$, missä $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja V p:n ympäristö X:ssä.



<u>Esim</u> 1° $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ on 2-monisto

Ylempi puolipallo $V = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ on pisteen $(0,0,1)$ ympäristö S^2:lla ($V = S^2 \cap H_+$, $H_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$)

Ast. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ ja määrit.

$\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, $\varphi: U \to V$ sileä U:ssa bijektio $\varphi^{-1}: V \to U$ $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ sileä, sillä jatkuu sileäksi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. (7.9.)

Mv. $p \in S^2$ funktio $R_A \circ \varphi : U \to R_A V$ on parametrisointi pisteen p ympäristössä kun $A \in SO(3)$ s.e. $R_A(0,0,1) = p$.

2° Matriisiryhmä

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \Big/ \theta, \phi \in [0, 2\pi) \right\} \subset GL_2(\mathbb{C})$$

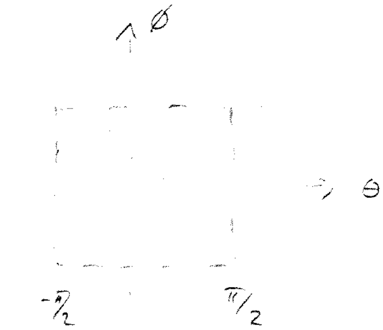
on 2-monisto $M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$:ssa.

Identifioidaan $M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8$ alkioittain:

$$T = \{ (\cos\theta, \sin\theta, 0, 0, 0, 0, \cos\phi, \sin\phi) / \theta, \phi \in [0, 2\pi) \} \subset \mathbb{R}^8$$

T:n 1-alkio: $p = (1,0,0,0,0,0,1,0)$

T:n parametrisointi pst. p:



Olk. $U = \{ (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{\pi}{2} \leq \theta, \phi \leq \frac{\pi}{2} \}$

Aset $\varphi : U \to T$

$(\theta, \phi) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, 0,0,0,0, \cos\phi, \sin\phi)$ sileä bijektio

$U \to \varphi(U) =: V$, $\varphi^{-1}: V \to U$ sileä, koska jatkuu $\mathbb{R}^8$:n avoimen joukon sileäksi funktioksi

$$(x_1, x_2, \dots, x_8) \mapsto \left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \arctan\left(\frac{x_8}{x_7}\right) \right)$$

Mv. pisteen $p \in T$ parametrisointi vastaavasti.

Huom T diffeomorfinen $\mathbb{R}^4$:n torusen kanssa (kun 'turhat' komponentit jätetään huomioimatta) ja $\mathbb{R}^3$:n vast. pyörähdyspinnan kanssa.

7.2.1. <u>Lause</u> n-ulotteinen matriisiryhmä on n-monisto.

<u>Tod</u>: Ol. $G \subset GL_m(\mathbb{K})$ n-ulotteinen matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra. Val. $r > 0$ kuten L.7.1.1, jolloin $V = \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ on I:n ymp. G:ssä ja rajoittumakuvaus $\exp: B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ on parametrisointi pisteessä I.

Huom. Eksplisiittisesti identifikaatio $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ valitsemalla $\mathfrak{g}$:lle kanta.

Ol. $g \in G$ m.v. määrit. $L_g: M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ asettamalla $L_g(A) := g \cdot A$. Huom. $L_g|_G: G \to G$ diffeo.

$L_g(V)$ g:n ymp. G:ssä ja $L_g \circ \exp: B_r \cap \mathfrak{g} \to L_g(V)$ parametrisointi g:n ympärissä. □.

Aikaisemmin: Osajoukon $X \subset \mathbb{R}^m$ tangenttiavaruus pist. $p \in X$:

$T_p X := \{ \gamma'(0) \mid \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ differentioituva ja $\gamma(0) = p \}$

7.2.2. <u>Lause</u> Jos $X \subset \mathbb{R}^m$ n-monisto, niin $\forall p \in X$ $T_p X$ on $\mathbb{R}^m$:n n-ulotteinen v.a.a.

<u>Tod</u>: Määritellään ensin $T_p X$ toisin (ja os. yhtäpitävyys edelliseen).

Olk. $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset X$ parametrisointi pisteessä p.

Ol. $0 \in U$ ja $\varphi(0) = p$. Asett.

$T_p X := d\varphi_0(\mathbb{R}^n)$.