5.2. Joitakin Lien algebroja

Sopimus: Lien ryhmät kirj. isolla esim. $GL_n(\mathbb{K})$
vast. Lien algebrat " kaunokirjaimin $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$

5.2.1 Lause $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ ja erityisesti siis

$\dim GL_n(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim GL_n(\mathbb{C}) = 2n^2$,

$\dim GL_n(\mathbb{H}) = 4n^2$

Tod: Ol. $A \in M_n(\mathbb{K})$. Polku $\gamma : t \mapsto I_n + tA \in M_n(\mathbb{K})$

toteuttaa $\gamma(0) = I_n$, $\gamma'(0) = A$. Rajoittamalla riittävän

pieneen välin $(-\varepsilon, \varepsilon)$ saadaan $\gamma(t) \in GL_n(\mathbb{K}) \; \forall \; t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Tark: $\det \gamma(0) = 1$, joten jatkuva funktio $t \mapsto \det \gamma(t)$

on mv. lähellä arvoa 1 (ja erityisesti siis $\neq 0$) pienillä t

$\Rightarrow A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. □.

5.2.2. Lause Matriisiryhmän $U(1)$ Lien algebra on

$\mathfrak{u}(1) = sp\{(i)\}$, joten $\dim U(1) = 1$.

Tod: Polku $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (e^{it}) \in U(1)$ toteuttaa

$\gamma(0) = I_1$ ja $\gamma'(t) = ie^{it}$, $\gamma'(0) = (i) \in \mathfrak{u}(1)$

Toisaalta, ol. $\gamma : \gamma(t) = (a(t) + b(t)i)$ differentioituva

polku $U(1)$:ssä s.e. $\gamma(0) = I_1 = (1)$.

Päte $|\gamma(t)|^2 = a(t)^2 + b(t)^2 = 1$ $(\gamma \in U(1))$,
joten arvon $\gamma(0) = 1 = a(0)$ on oltava funktion
$t \mapsto a(t)$ lokaali maksimi $\Rightarrow a'(0) = 0$
$\Rightarrow \gamma'(0) \in sp\{(i)\}$. □.

Vastaavasti nähdään, että $\dim(SO(2)) = 1$ (HT) 5.6.

Myöh. nähdään: sileästi (C^∞) isomorfisilla matriisiryhmillä on sama dimensio.

5.2.3. <u>Lause</u> $Sp(1)$:n Lien algebra on

$$sp(1) = \operatorname{span}\{(i),(j),(k)\},$$ joten $\dim Sp(1) = 3$.

<u>Tod</u>: Polku $\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = (\cos t + (\sin t)i) \in Sp(1)$

toteuttaa $\gamma_1(0) = I$ ja $\gamma_1'(t) = (-\sin t + (\cos t)i)$

$\gamma_1'(0) = (i) \in sp(1)$.

Samoin $\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = (\cos t + (\sin t)j) \in Sp(1)$
$\gamma_2(0) = I$ ja $\gamma_2'(0) = (j) \in sp(1)$.

Samoin $\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = (\cos t + (\sin t)k) \in Sp(1)$
$\gamma_3(0) = I$ ja $\gamma_3'(0) = (k) \in sp(1)$.

Saadaan $\operatorname{span}\{(i),(j),(k)\} \subset sp(1)$.

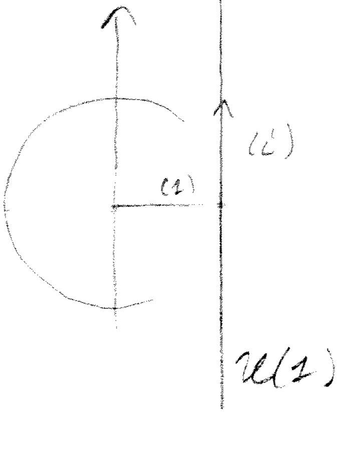
Toisaalta ol. $\gamma(t) = a(t) + b(t)i + c(t)j + d(t)k \in Sp(1)$
s.e. $\gamma(0) = I = (1)$ eli $b(0) = c(0) = d(0) = 0$ ja $a(0) = 1$

Pätee: $|\gamma(t)|^2 = a(t)^2 + b(t)^2 + c(t)^2 + d(t)^2 = 1$, joten

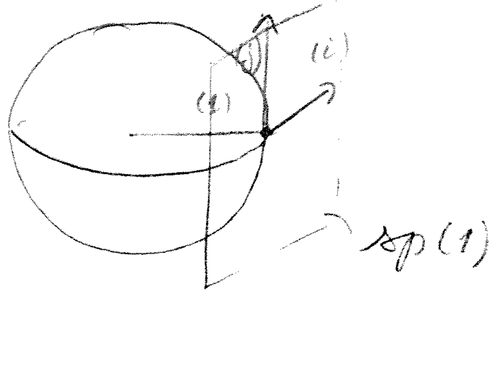
$|\gamma(0)|^2 = a(0)^2 = 1$ eli arvon $a(0) = 1$ on oltava lokaali

maksimi pisteessä 0 $\Rightarrow$ $a'(0) = 0$ $\Rightarrow$ $\gamma'(0) \in sp\{(i),(j),(k)\}$ □

$U(1)$



$Sp(1)$ (2-ul. versio)



5.2.4. Lause Ol. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. $SL_n(\mathbb{K})$:n Lien algebra on $sl_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{trace } A = 0\}$.
Erityisesti: $\dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2-1$, $\dim SL_n(\mathbb{C}) = 2(n^2-1)$.
Todistusta varten osoitetaan seuraava keskeinen lemma:

5.2.5. Lemma Ol. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Jos $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_n(\mathbb{K})$ on differentioituva ja $\gamma(0) = I$, niin

$$\frac{d}{dt}(\det \gamma(t))\Big/_{t=0} = \text{trace } \gamma'(0)$$

Tod:

Ol. $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} A_{1j} \det(A[1,j])$,

missä $A[i,j] \in M_n(\mathbb{K})$ on saatu A:sta poistamalla i:s rivi ja j:s sarake.

Saadaan:

$$\frac{d}{dt}(\det \gamma(t))\Big/_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\gamma(t)_{1j} \det(\gamma(t)[1,j])\right)\Big/_{t=0}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\gamma'(0)_{1j} \underbrace{\det(\gamma(0)[1,j])}_{=\delta_{1j}} \quad (\gamma(0) = I)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\underbrace{\gamma(0)_{1j}}_{=\delta_{1j}} \frac{d}{dt}\left(\det(\gamma(t)[1,j])\right)\Big/_{t=0}$$

$$= \gamma'(0)_{11} + \frac{d}{dt}\left(\det(\underbrace{\gamma(t)[1,1]}_{\in M_{n-1}(\mathbb{K})})\right)\Big/_{t=0}$$

Induktiivisesti $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}(\det(\gamma(t)))\Big/_{t=0} = \gamma'(0)_{11} + \dots + \gamma'(0)_{nn} \quad \square.$$

Tod: (5.2.4) Ol. $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to SL_n(\mathbb{K})$ differentioituva ja $\gamma(0)=I$. Koska $\det\gamma(t)\equiv 1$, niin

Lemma 5.2.5 $\Rightarrow$ $\operatorname{trace}(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}(\det\gamma(t))\big|_{t=0} \equiv 0.$

Saatiin: $\forall A\in sl_n(\mathbb{K})$ pätee $\operatorname{trace} A = 0$.

Ol. toisaalta $A\in M_n(\mathbb{K})$ s.e. $\operatorname{trace} A = 0$. Polku

$\gamma: t\mapsto\gamma(t) = I + tA$ toteuttaa $\gamma(0)=I$ ja $\gamma'(0)=A$,

mutta yleensä $\gamma(t)\notin SL_n(\mathbb{K})$

Muodostetaan uusi polku $\alpha: t\mapsto\alpha(t)$ asettamalla

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det\gamma(t)}\gamma_{11} & \cdots & \frac{1}{\det\gamma(t)}\gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nyt pätee: α differentioituva (pienillä t $\det\gamma(t)\neq 0$)

ja $\alpha(t)\in SL_n(\mathbb{K})$ $\forall t$ ja $\alpha(0)=I$. Lisäksi

$\alpha'(0)=A$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma_{1j}(t)}{\det\gamma(t)}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\gamma_{1j}'(0)\det\gamma(0) - \frac{d}{dt}(\det\gamma(t))\big|_{t=0}\gamma_{1j}(0)}{(\det\gamma(0))^2}$$

$\gamma(0)=I$, L.5.2.5., trace $A=0$, $\gamma'(0)=A$

$$= \gamma_{1j}'(0) = A_{1j} \quad \forall j=1,\dots,n$$

$$\alpha_{kj}'(0) = \gamma_{kj}'(0) = A_{kj} \quad \forall k=2,\dots,n,\ j=1,\dots,n$$

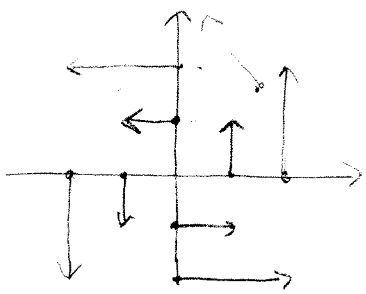
$\Rightarrow \alpha'(0) = A$ □.

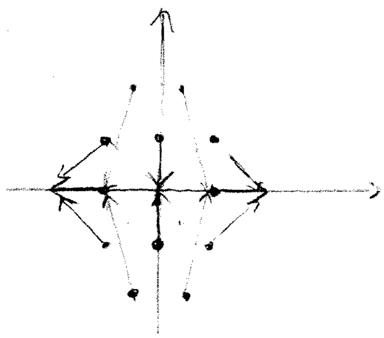
5.3. Lien algebran vektorit vektorikenttinä

$\mathbb{R}^m$:n vektorikenttä on jatkuva funktio $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
(idea: F liittää jokaiseen pisteeseen $p \in \mathbb{R}^m$ jonkin
$\mathbb{R}^m$:n vektorin)

Jos $A \in M_n(\mathbb{K})$, niin $R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ on vektorikenttä
$\mathbb{K}^n$:ssä $(= \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2n}$ tai $\mathbb{R}^{4n})$

Esim. Miltä näyttävät matriiseihin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ liittyvät vektorikentät?





$R_A(x,y) = (-y,x)$

$(x,y) \cdot R_A(x,y) = 0$

$R_B(x,y) = (x,-y)$

$GL_n(\mathbb{K})$:n alkiot tulkitaan lin. kuvauksina $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ vastaavuuden $A \leftrightarrow R_A$ kautta $\Rightarrow$

Polku $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL_n(\mathbb{K})$ voidaan tulkita 1-parametrisenä perheenä lin. kuvauksia.

Kuinka tämä perhe operoi yksittäiseen vektoriin $\underline{X} \in \mathbb{K}^n$?

Olk. $\sigma : t \mapsto R_{\mu(t)}\underline{X}$ differentioituva polku $\mathbb{K}^n$:ssä. Jos $\mu(0) = I$,
niin $\sigma(0) = \underline{X}$. Tulon derivoimissäännöstä (ok. myös
ei neliömuotoisille matriiseille)

saadaan: $\sigma(t) = \bar{X}\gamma(t)$

$\sigma'(t) = \bar{X}\gamma'(t) = R_{\gamma'(t)}\bar{X}$ ja $\sigma'(0) = R_{\gamma'(0)}\bar{X}$.

Voidaan ajatella: $R_{\gamma'(0)}$ vektorikenttä $\mathbb{K}^n$:ssä, jonka arvo $\forall \bar{X} \in \mathbb{K}^n$ kertoo suunnan, mihin $\bar{X}$ alkujaan liikkuu polkua γ vastaavan lin. kuvausperheen vaikutuksesta.

Esim. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2)$

$$A = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in so(2) \overset{(HT)}{=} \text{span}(A)$$

vektorikenttä R_A kuvaa, kuinka rotaatioiden perhe $(\gamma(t))_t$ alkujaan liikuttaa ympyröissä tason pisteitä.

Vektorikentän R_B vaikutukseen perusteella $B \notin so(2)$.

Jos $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in GL_2(\mathbb{R})$ s.e. $\gamma(0) = I$ ja $\gamma'(0) = B$, niin pienillä t $R_{\gamma(t)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ei säilytä normia!

5.4. Ortogonaalisten ryhmien Lien algebrat

Aset. $o_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A + A^* = 0\}$ ja merkitään

$so(n) = o_n(\mathbb{R})$ vinosymmetriset matriisit

$u(n) = o_n(\mathbb{C})$ vinohermiittiset ″

$sp(n) = o_n(\mathbb{H})$ vinosymplektiset ″

Osoitetaan kohta, että $O_n(\mathbb{K})$:n Lien algebra on $o_n(\mathbb{K})$.

$$A = -A^* \iff A_{ij} = -\overline{A_{ji}} \quad \forall i,j = 1,\dots,n$$

erityisesti siis $A_{ii} = 0$ jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ja
A_{ii} puhtaasti imaginaarinen jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Esim 1° $u(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & di \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8$:n 4-ulotteinen $\mathbb{R}$-kertoiminen v.a.a.

Ei $\mathbb{C}$-kertoiminen v.a.a: $i \cdot \begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & bi-c \\ -bi-c & -d \end{pmatrix} \notin u(2)$

2° $sp(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 i + b_1 j + c_1 k & x+yi+zj+wk \\ -x+yi+zj+wk & a_2 i + b_2 j + c_2 k \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a_l, b_l, c_l \\ x,y,z \in \mathbb{R} \\ l = 1,2 \end{matrix} \right\}$

3° $so(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

5.4.1. Lause $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ seuraavat ehdot yhtäpitävät

(1) $A \in o_n(\mathbb{K})$

(2) $\langle R_A(\bar{X}), \bar{Y} \rangle = -\langle \bar{X}, R_A(\bar{Y}) \rangle \quad \forall \bar{X}, \bar{Y} \in \mathbb{K}^n$

(3) kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle R_A(\bar{X}), \bar{X} \rangle = 0 \quad \forall \bar{X} \in \mathbb{R}^n$

Tod: $(1) \Rightarrow (2)$: Ol. $A \in o_n(\mathbb{K})$ eli $A = -A^*$. $\forall i,j = 1, \dots, n$ pätee:

$$\langle R_A(e_i), e_j \rangle = \langle (A_{i1}, \dots, A_{in}), e_j \rangle = A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$$

$$= -\overline{\langle R_A(e_j), e_i \rangle} = -\langle e_i, R_A(e_j) \rangle$$

Lin. jatkamalla mv. $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathbb{K}^n$

$(2) \Rightarrow (1)$: samoin

Ol. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $(2) \Rightarrow (3)$ kun aset $\bar{Y} = \bar{X}$.

$(3) \Rightarrow (2)$: $0 = \langle R_A(\bar{X} + \bar{Y}), \bar{X} + \bar{Y} \rangle$

$$= \underbrace{\langle R_A(\bar{X}), \bar{X} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle R_A(\bar{Y}), \bar{Y} \rangle}_{=0} + \langle R_A(\bar{X}), \bar{Y} \rangle + \langle R_A(\bar{Y}), \bar{X} \rangle$$

$$= \langle R_A(\bar{X}), \bar{Y} \rangle + \langle R_A(\bar{Y}), \bar{X} \rangle. \square$$

5.4.2. Lause Matriisiryhmän $O_n(\mathbb{K})$ Lien algebra on $o_n(\mathbb{K})$.

Tod: Ol. $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O_n(\mathbb{K})$ differentioituva ja $\gamma(0) = I$.

Tulon derivointisääntö antaa $\gamma(t) \cdot \gamma(t)^* = I \Rightarrow$

$\gamma'(t)\gamma(t)^* + \gamma(t)\gamma'(t)^* = 0 \Rightarrow \gamma'(0) + \gamma'(0)^* = 0$

$\Rightarrow \gamma'(0) \in o_n(\mathbb{K})$. $\Rightarrow g(O_n(\mathbb{K})) \subset o_n(\mathbb{K})$.

Riittää konstruoida $O_n(\mathbb{K})$:lle kanta ja polut $O_n(\mathbb{K})$:issa kunkin kantavektorin suuntaan. (6,13)

Ensin tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

[illegible] luonnollinen kanta on joukko

$$\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \le i < j \le n\}, \text{ missä}$$

$$M_n(\mathbb{R}) \ni E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

esim. $so(3) = \text{span}\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$

$$= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Polut $\gamma_{ij} : t \mapsto \gamma_{ij}(t)$, missä $1 \le i < j \le n$

$$\gamma_{ij}(t) = I + (\sin t)E_{ij} - (\sin t)E_{ji} + (-1 + \cos t)(E_{ii} + E_{jj})$$

$\gamma_{ij}(t)$:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ & 0 & \cos t & 0 & \sin t & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & -\sin t & 0 & \cos t & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\forall t \quad \gamma_{ij}(t) \in SO(n)$, sillä $\det \gamma_{ij} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

ja $\gamma_{ij}(t) \cdot \gamma_{ij}(t)^* = I_n \quad \forall t$

Lisäksi $\gamma_{ij}'(t) = (\cos t)E_{ij} - (\cos t)E_{ji} - \sin t(E_{ii} + E_{jj})$

ja $\gamma_{ij}'(0) = E_{ij} - E_{ji}$, $\gamma_{ij}(0) = I$.

Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (HT). $\square$.

<u>Huom</u> $R_{\gamma_{ij}}$: [illegible], $1 \le i < j \le n$

$$e_i \gamma_{ij} = e_i + (\sin t)e_j + (-1 + \cos t)e_i = (\sin t)e_j + (\cos t)e_i$$
$$e_j \gamma_{ij} = e_j - (\sin t)e_i + (-1 + \cos t)e_j = -(\sin t)e_i + (\cos t)e_j$$
$$e_\ell \gamma_{ij} = e_\ell \quad \forall\, \ell \ne i, j$$

eli: R_{ij} pyörittää aliavaruutta span$\{e_i, e_j\}$ kulman t verran. Muu osa avaruutta $\mathbb{R}^n$ pysyy paikallaan.

5.4.8. Seuraus

(1) $\dim(SO(n)) = \frac{n(n-1)}{2}$

(2) $\dim(U(n)) = n^2$

(3) $\dim(Sp(n)) = 2n^2+n$

Tod: $A \in M_n(\mathbb{K})$ n^2 alkiota $\in \mathbb{K}$, josta n diagonaalilla

d diagonaalin yläpuolella ja d sen alapuolella:

$$n^2 = n + 2d \Rightarrow d = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A \in so(n)$: $a_{ii} = 0$ $\quad a_{ij} = -a_{ji}$ $\quad i \neq j$

A määräytyy diagonaalin yläpuolisista alkioista $= d$ kpl

$$\Rightarrow \dim(SO(n)) = d = \frac{n}{2}(n-1)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $A \in u(n)$ $\quad z_{jj} = b_{jj} i$, $b_{jj} \in \mathbb{R}$

$z_{kj} = a_{kj} + b_{kj} i$, $a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{R}$

$z_{jk} = -\overline{z}_{kj} = -a_{kj} + b_{kj} i$

A määräytyy n:stä diagonaalin alkiosta á 1 reaalinen parametri

ja $d = \frac{n}{2}(n-1)$:stä diagonaalin yläpuolisesta alkiosta á 2 reaalista parametria

$$\Rightarrow \dim(U(n)) = n + 2d = n + n(n-1) = n^2.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{H}$: $A \in sp(n)$: $q_{ll} = b_{ll} i + c_{ll} j + d_{ll} k$, $b_{ll}, c_{ll}, d_{ll} \in \mathbb{R}$

$q_{ls} = a_{ls} + b_{ls} i + c_{ls} j + d_{ls} k$, $a_{ls}, b_{ls}, c_{ls}, d_{ls} \in \mathbb{R}$

$q_{sl} = -\overline{q}_{ls} = -a_{ls} + b_{ls} i + c_{ls} j + d_{ls} k$

$$\Rightarrow \dim Sp(n) = 3 \cdot n + 4 \cdot d = 3n + 2n(n-1) = 2n^2 + n \quad \square.$$

6. Matriisin eksponenttifunktio

Miten löytyy optimaalinen polku $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in G$ suuntaan $A \in \mathfrak{g}$?

6.1. Matriisisarjoista

Ol. $A_\ell \in M_n(\mathbb{K})$

Sarja $\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell$ suppenee (itseisesti) jos $\forall\, i,j$ sarjat $\sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell)_{ij}$ suppenevat (itseisesti). Jos $\sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell)_{ij} = A_{ij} \in \mathbb{K}$ niin $\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell = A \in M_n(\mathbb{K})$.

6.1.1. Lause Ol. sarjat $\sum A_\ell$, $\sum B_\ell$ suppenevat ja ainakin toinen itseisesti. Olkoon $C_\ell := \sum_{k=0}^{\ell} A_k B_{\ell-k}$. Tällöin pätee $\sum C_\ell = (\sum A_\ell)(\sum B_\ell)$.

Tod: HT

6.1.2. Lause Ol. $c_i \in \mathbb{K}$ ja $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, $x \in \mathbb{K}$ potenssisarja, jonka suppenemissäde on R. Tällöin $\forall\, A \in M_n(\mathbb{K})$, joilla $|A| < R$ sarja

$$f(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots$$

suppenee itseisesti.

Huom $|A|$ on tässä $M_n(\mathbb{K})$:n $(= \mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}^{2n^2}$ tai $\mathbb{R}^{4n^2})$ euklidinen normi. Ei esim. sup-normi

$$\|A\| = \sup\{|xA| \mid x \in \mathbb{K}^n, |x| = 1\}$$

Sup-normia käyttäen L. 6.1.2. tulos on tarkempi:

Jos $\|A\| < R$ niin $f(A)$ suppenee itseisesti ja jos $\|A\| > R$ niin $f(A)$ hajaantuu.

Sup-normia ei tässä kuitenkaan käytetä.

L. 6.1.2. todistamiseen tarvitaan:

6.1.3. <u>Lemma</u>

$\forall\ X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ pätee $|XY| \le |X||Y|$

<u>Tod</u>: $|(XY)_{ij}|^2 = |\sum_{l=1}^{n} X_{il} Y_{lj}|^2$

$= |\langle X\text{:n } i\text{:s rivi}, (Y\text{:n } j\text{:s sarake})^T \rangle|^2$

$\overset{\text{Schwarz}}{\le} |(X\text{:n } i\text{:s rivi})|^2 |(Y\text{:n } j\text{:s sarake})^T|^2$

$= \left(\sum_{l=1}^{n} |X_{il}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} |Y_{lj}|^2\right)$

$\Rightarrow |XY|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |(XY)_{ij}|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(\sum_{l=1}^{n} |X_{il}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} |Y_{lj}|^2\right)\right)$

$= |X|^2 |Y|^2$. $\square$

<u>Tod</u> (6.1.2.): $\forall\ i,j$ pitää os.

Sarja $|(c_0 I)_{ij}| + |(c_1 A)_{ij}| + |(c_2 A^2)_{ij}| + \cdots$ supp.

Sarjan l:nelle termille pätee:

$|(c_l A^l)_{ij}| \le |c_l A^l| = |c_l||A^l| \overset{\text{L.6.1.3.}}{\le} |c_l||A|^l$

Majoranttiperiaate $\Rightarrow$ väite. $\square$.
$|A| < R$

6.2. Matriisiryhmän optimaalinen polku

Esim. Ol. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in so(2)$.

Mikä on luonnollisin differentioituva polku $\gamma : t \mapsto \gamma(t) \in SO(2)$ s.e. pätee $\gamma(0) = I$ ja $\gamma'(0) = A$.

1. Arvaus $\gamma(t) = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \notin SO(2)$

2. Yritys: $\forall\, \gamma : t \mapsto \gamma(t) \in SO(2)$ ja joka kulkee pisteiden I, A kautta on muotoa

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos f(t) & \sin f(t) \\ -\sin f(t) & \cos f(t) \end{pmatrix}, \quad \text{missä}$$

f differentioituva, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Valinta $f(t) = t$ ilmeinen. Mikä visuaalinen ominaisuus tällä polulla on verrattuna muihin kandidaatteihin?

Vast. $\forall\, \bar{X} \in \mathbb{R}^2$ polku $\alpha(t) := R_{\gamma(t)}(\bar{X})$ on vektorikentän R_A <u>integraalikäyrä</u>. Tämä tarkoittaa: vektorikenttä R_A kertoo suunnan, mihin $\bar{X}$ siirtyy polkuun $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ liittyvien lineaarikuvausten vaikutuksesta <u>KAIKKINA</u> ajanhetkinä t (ei vain ajanhetkellä 0) :

$$\alpha'(t) = R_{\gamma'(t)} \bar{X} = R_A(R_{\gamma(t)} \bar{X}) = R_A(\alpha(t)) \quad \forall\, t$$

Määritelmä: Polku $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ on vektorikentän $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ integraalikäyrä, jos $\alpha'(t) = F(\alpha(t))$ $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Matriisilla A edellä R_A:n integraalikäyrät origokeskisten ympyröiden kaaria parametrisoituna positiiviseen kiertosuuntaan.

Yleisemmin: Jos $A \in gl_n(\mathbb{K})$ ja halutaan löytää 'luonnollinen' polku $\mu : t \mapsto \mu(t) \in GL_n(\mathbb{K})$ s.e. $\mu(0) = I$ ja $\mu'(0) = A$: Yritetään valita μ s.e. $\forall\, \underline{X} \in \mathbb{K}^n$ polku $t \mapsto R_{\mu(t)} \underline{X}$ on vektorikentän R_A integraalikäyrä.

Etsitään R_A:n pisteestä $\alpha(0) = \underline{X}$ alkavan integraalikäyrän α potenssisarjaesitys. Kertoimet $c_i \in \mathbb{K}$ määrätään s.e. potenssisarjan $\alpha(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$ määräämä polku $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ on R_A:n integraalikäyrä, jolle $\alpha(0) = c_0 = \underline{X}$. P.o. $\alpha'(t) = R_A(\alpha(t))$:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \ldots \\ R_A(\alpha(t)) = c_0 A + c_1 t A + c_2 t^2 A + c_3 t^3 A + \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_0 A, \quad 2c_2 = c_1 A, \quad 3c_3 = c_2 A, \quad \ldots$$

$$\Rightarrow \quad l c_l = c_{l-1} A \qquad \text{(rekursiivisesti)}$$

alkuehdosta: $c_0 = \underline{X} \Rightarrow c_1 = \underline{X} A$, $c_2 = \dfrac{\underline{X} A^2}{2}$, $c_3 = \dfrac{\underline{X} A^3}{3!}$, $\ldots$, $c_n = \dfrac{\underline{X} A^n}{n!}$

$t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha(t) = \underline{X} + \underline{X}tA + \frac{\underline{X}(tA)^2}{2} + \frac{\underline{X}(tA)^3}{3!} + \dots = \underline{X}e^{tA} = R_{e^{tA}}\underline{X}$. (6.5.)

Saatiin : polulla $\gamma(t) = e^{tA}$ on haluttu ominaisuus :

$\forall \underline{X} \in \mathbb{K}^n$, $\alpha(t) = R_{\gamma(t)}(\underline{X})$ on R_A:n integraalikäyrä.

Tämä olisi saatu nopeammin (helposti) käyttämällä lausetta:

6.2.1. Lause Ol. $A \in gl_n(\mathbb{K})$. Polku $\gamma : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$

$\gamma(t) := e^{tA}$ on differentioituva ja $\gamma'(t) = A \cdot \gamma(t) = \gamma(t) \cdot A$.

Tod: Matriisin $\gamma(t) = e^{tA} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots$

n^2 komponenttia ovat reaalimuuttujan t potenssisarjoja,

jotka voidaan derivoida termeittäin $\Rightarrow$

$\gamma'(t) = A + tA^2 + \frac{t^2A^3}{2} + \dots$, josta näkee

$\gamma'(t) = \gamma(t)A = A\gamma(t)$. □.

Kaksi tulkintaa lauseelle 6.2.1:

6.2.2. Seuraus Ol. $A \in M_n(\mathbb{K})$ ja $\gamma(t) = e^{tA}$

(1) $\forall \underline{X} \in \mathbb{K}^n$, $\alpha(t) = R_{\gamma(t)}(\underline{X})$ on R_A:n integraalikäyrä ja $\beta(t) = L_{\gamma(t)}(\underline{X})$ on L_A:n integraalikäyrä.

(2) γ on itse sen $M_n(\mathbb{K})$:n vektorikentän integraalikäyrä, jonka arvo pisteessä $g \in M_n(\mathbb{K})$ on $A \cdot g$ (ja myös sen vektorikentän integraalikäyrä, jonka arvo pisteessä $g \in M_n(\mathbb{K})$ on $g \cdot A$).

Tod:

(1): $R_A(\alpha(t)) = \overline{X}\gamma(t)A = \overline{X}\gamma'(t) = R_{\gamma'(t)}\overline{X} = \alpha'(t)$

$L_A(\beta(t)) = A\gamma(t)\overline{X} = \gamma'(t)\overline{X} = L_{\gamma'(t)}\overline{X} = \beta'(t)$

(2): Ol. $F_i : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ s.e. $F_1(g) = Ag$, $F_2(g) = gA$

$F_1(\gamma(t)) = A\gamma(t) = \gamma'(t) = \gamma(t)A = F_2(\gamma(t))$. $\square$.

Huom 1° (1), (2) antavat erilaisen kuvan ja erilaiset käyttötarkoitukset

2° Mielenkiintoista, että vasen- ja oikeanpuoleiset versiot kohdassa (1) voivat olla yhtäaikaa tosia, sillä F_1, F_2 eivät voi olla samoja!

Ol. $g \in GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$

$F_1(g) = F_2(g) \Leftrightarrow Ag = gA \Leftrightarrow A = gAg^{-1}$

e. konjugointi 'optimaalisen' käyrän alkioilla ei muuta matriisia A.

6.3. Eksponenttifunktion ominaisuuksia

$\exp : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \quad A \mapsto e^A$

edellä: exp/sarjan suppenemisen suora = 'optimaalinen' käsite.

Muita, algebrallisia ominaisuuksia?

6.3.1. Lause Jos $AB = BA$, niin $e^{A+B} = e^A e^B$

Tod: $e^A \cdot e^B = (I + A + \frac{A^2}{2} + \dots)(I + B + \frac{B^2}{2} + \dots)$

$= I + (A+B) + (\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}) + \dots$

toisaalta: $e^{A+B} = I + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2} + \dots$

$= I + (A+B) + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots$

kun jatkuu, sillä

$$e^A \cdot e^B = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{l-k}}{(l-k)!}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} A^k B^{l-k} \overset{al}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(A+B)^l}{l!} \quad . \square .$$

Tällä lauseella on huomattavaa käyttöä!

6.3.2. Lause $\forall\, A \in M_n(\mathbb{K})$, $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$, joten

$\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$.

Tod: $A(-A) = (-A)A \implies e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$,

joten $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. $\square$.

6.3.3. <u>Lause</u> Jos $A \in o_n(\mathbb{K})$, niin $e^A \in O_n(\mathbb{K})$

<u>Tod</u>: $A \in o_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^* = -A$

$$\Rightarrow e^A (e^A)^* = e^A e^{A^*} = e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_n$$

$$\Rightarrow e^A \in O_n(\mathbb{K}) \ \square.$$

<u>Huom</u>: Saatiin siistimpi todistus sille, että $g(O_n(\mathbb{K})) = o_n(\mathbb{K})$:

Jos $A \in o_n(\mathbb{K})$, niin $\gamma(t) = e^{tA}$ on differentioituva,

$\gamma \in O_n(\mathbb{K})$ ja $\gamma'(0) = A \Rightarrow o_n(\mathbb{K}) \subset g(O_n(\mathbb{K}))$, mikä oli

hankalampi suunta.

6.3.4. <u>Lause</u> $su(n) = u(n) \cap sl_n(\mathbb{C})$

$= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{trace} A = 0\}$

<u>Tod</u>: "$\subset$": ilmeinen

"$\supset$" Konstruoitava polku $\gamma \in SU(n)$ s.e. $\gamma(0) = I$,

$\gamma'(0) = A$ kun $A \in u(n) \cap sl_n(\mathbb{C})$.

Polku $\gamma : t \mapsto e^{tA} \in U(n)$. Täytyy siis osoittaa

$\gamma(t) \in SL_n(\mathbb{C})$ $\forall t$. Tämä seuraa seuraavasta

lemmasta:

6.3.5. <u>Lemma</u>: Ol. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ pätee:

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{trace}(A)}$$

<u>Tod</u>: Ol. $f(t) = \det e^{tA}$

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\det e^{(t+h)A} - \det e^{tA} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \det e^{tA} \left(\det e^{hA} - 1 \right) = \det e^{tA} \frac{d}{dt} \left(\det e^{tA} \right)\Big|_{t=0}$$

$$\overset{(5.2.5)}{=} f(t) \operatorname{trace} A.$$