(+): $\det A = a\begin{vmatrix} e & f \\ cd-af & ae-bd \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ bf-ce & ae-bd \end{vmatrix}$

$+ c\begin{vmatrix} d & e \\ bf-ce & cd-af \end{vmatrix} = a(ae^2 - bde - fcd + af^2)$

$- b(ade - bd^2 - bf^2 + cef) + c(cd^2 - adf - ebf + ce^2)$

$= a^2(e^2+f^2) + b^2(f^2+d^2) + c^2(d^2+e^2) - 2abde - 2fcda - 2bcef$

$= (ae-bd)^2 + (af-cd)^2 + (bf-ce)^2 > 0$

Vast. $\ominus$: $\det A < 0$. $\square$.

$SO(3)$:n alkiot voidaan ajatella fysikaalisesti mahdollisiksi pallon liikkeiksi. $A \in O(3)\setminus SO(3)$ kääntää pallon sisäpuolen ulkopuoleksi.

3.6. Euklidisen avaruuden isometriaryhmä

Olk. $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ isometria} \}$

$(\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n), \circ)$ ryhmä (HT)

Aik. Jos $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ja $f(0) = 0$, niin $f = R_A$ jollakin $A \in O(n)$.

Jos $f(0) = v \neq 0$, niin $x \mapsto f(x) - v$ on isometria

ja $f(x) - v = R_A$ jollakin $A \in O(n)$

Saatiin: $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{ f \mid f(x) = R_A(x) + v$ jollakin $A \in O(n)$ ja $v \in \mathbb{R}^n \}$.

Ol. $n=3$:

Olk. $A \in O(3)$ ja $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Esitään isometria

$f: \overline{X} \mapsto R_A(\overline{X}) + V$ matriisina

$$F := \begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{R})$$

Olk. $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, merk. $(\overline{X}, 1) = (x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbb{R}^4$

Jolloin: $(\overline{X}, 1) \cdot F = (\overline{X} \cdot A + V, 1) = (R_A \overline{X} + V, 1) \in \mathbb{R}^4$

Tässä mielessä F esittää isometriaa f.

Huom. R_F ei $\mathbb{R}^4$:n isometria!

Jos $f_1, f_2 \in Isom(\mathbb{R}^3)$ niin vast. $f_i(\overline{X}) = R_{A_i}(\overline{X}) + V_i$ ja

$F_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ V_1 & 1 \end{pmatrix}$ $F_2 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ V_2 & 1 \end{pmatrix}$ niiden esitykset $\in GL_4(\mathbb{R})$

Tulo:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ V_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ V_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_2 & 0 \\ V_1 A_2 + V_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ R_{A_2} V_1 + V_2 & 1 \end{pmatrix}$$

esittää isometriaa $f_2 \circ f_1 : \overline{X} \longmapsto R_{A_1 A_2}(\overline{X}) + R_{A_2}(V_1) + V_2$

yl. n:

$$Isom(\mathbb{R}^n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \middle| A \in O(n), V \in \mathbb{R}^n \right\} \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$$

Tämän aliryhmä:

$$Trans(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \middle| V \in \mathbb{R}^n \right\} \cong (\mathbb{R}^n, +)$$

Huom: Siis $(\mathbb{R}^n, +)$ isomorfinen matriisiryhmän kanssa!

3.7. Symmetriaryhmät

Joukon $X \subset \mathbb{R}^n$ <u>symmetriaryhmä</u> on kaikkien niiden $\mathbb{R}^n$:n isometrioiden muodostama ryhmä, jotka kuvaavat joukon X itselleen.

<u>Määritelmä:</u> $\mathrm{Symm}(X) := \{ f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(X) = X \}$

<u>Esim</u> 1° $\mathrm{Symm}(S^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in O(n+1),\ v = (0,\dots,0) \right\}$

$$\cong O(n+1)$$

2° $\mathrm{Symm}(\text{säännöllinen } m\text{-kulmio} \subset \mathbb{R}^2) = D_m$ kertaluvun (= alkioiden lkm) $2m$ <u>diedriryhmä</u>

$A \in D_m$, jolla $\det A = 1$ ovat rotaatioita. Tämän aliryhmän indeksi (= vas. sivuluokkien lkm) = 2:

$$H = \{ A \in D_m \mid \det A = 1 \}$$

$a \in D_m$ $\quad aH = \{ aA \mid A \in H \}$

$a \in H$ $\quad aH = H$

$a \notin H$ $\quad \det a = -1$: $aH = \{ A \in D_m \mid \det A = -1 \}$

Esimerkki 2° heijastuu yleisenä periaatteena:

<u>Määritelmä</u> $\mathrm{Symm}(X) = \mathrm{Symm}^+(X) \cup \mathrm{Symm}^-(X)$,

missä $\mathrm{Symm}^{\pm}(X) := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \det A = \pm 1 \right\}$

Joukon $\mathrm{Symm}^+(X)$ alkioita sanotaan <u>suoriksi symmetrioiksi</u>

" $\mathrm{Symm}^-(X)$ " " <u>epäsuoriksi</u> "

3.7.1. Lause $\forall\, \underline{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Symm}^+(\underline{X}) \subset \mathrm{Symm}(\underline{X})$ on aliryhmä, jonka indeksi on 1 tai 2.

Tod: (HT)

Huom. Monissa M.C. Escherin piirroksissa (tason laatoituksia) äärellinen symmetriaryhmä. Niiden luokittelu kts. esim. Gallian: Contemporary Abstract Algebra

3.7.2. Lause (Leonardo da Vinci 1452–1519)

Ol. $\underline{X} \subset \mathbb{R}^2$ s.e. $\mathrm{Symm}(\underline{X})$ äärellinen. Tällöin $\mathrm{Symm}(\underline{X}) \cong D_m$ tai $\mathbb{Z}_m$ jollakin m.

Tod: (Idea)

1° $f \in \mathrm{Symm}(\underline{X})$ $f \hat{=} R_F$, $F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$ kuten edellä

jos $V \neq 0$, niin $\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{Symm}(\underline{X})$ on ääretön $\lightning$.

$\Rightarrow V = 0$ ja $\forall f$ yhteinen kiintopiste

$\Rightarrow \mathrm{Symm}(\underline{X})$ $O(2)$:n aliryhmä

2° $O(2)$:n kaikki äärelliset aliryhmät ovat D_m ja $\mathbb{Z}_m$. (kts. esim Gallian tai Armstrong: Groups and symmetry)

3.7.3. Lause Ol. $\underline{X} \subset \mathbb{R}^3$ s.e. $\mathrm{Symm}^+(\underline{X})$ äärellinen

Tällöin $\mathrm{Symm}^+(\underline{X}) \cong D_m, \mathbb{Z}_m, A_4, S_4$ tai A_5

Yllä $\mathbb{Z}_m$: m:n alkion syklinen ryhmä
S_m: m:n alkion permutaatioryhmä

$A_m \subset S_m$ parillisten permutaatioiden muodostama aliryhmä (alternoiva ryhmä)

Tod 3.7.3: (idea)

1° kuten 3.7.2. $\mathrm{Symm}^+(X)$ $SO(3)$:n aliryhmä

2° $SO(3)$:n äärelliset aliryhmät ovat

D_m, Z_m, A_4, S_4, A_5.

tarkka tod. kts. Armstrong tai Gallian

Huom $n=2$ D_m ös. tason peilauksena: $\det A<0$

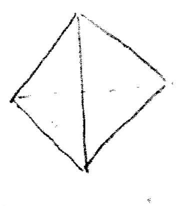
$n=3$ D_m avaruudessa raskaa pyörityksenä akselin suhteen: $\det A > 0$

Säännölliset monitahokkaat ovat esimerkkejä joukoista,

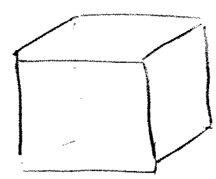
joiden suorat symmetriat ovat A_4, S_4 ja A_5

Säännöllisten monitahokkaiden luokittelu (Plato 400 eKr):
(= monitahokas, jonka sivut ovat keskenään kongruentit säännölliset monikulmiot)

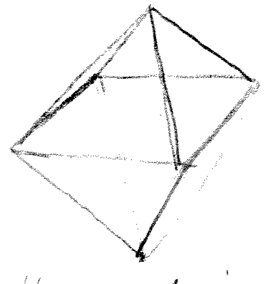
tetraedri ("tuli")
$S^+ = A_4$ (kl. $\frac{4!}{2} = 12$)



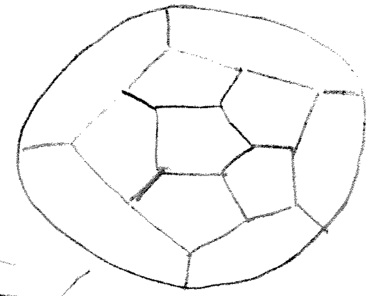
kuutio ("maa")
$S^+ = S_4$ (kl. $4! = 24$)



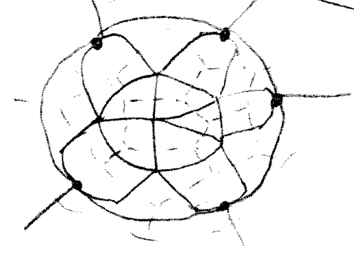
oktaedri ("ilma")
$S^+ = S_4$ kuution duaali



dodekaedri ("universumi")
$S^+ = A_5$ (kl. $\frac{5!}{2} = 60$)



ikosaedri ("vesi")
$S^+ = A_5$ dodekaedrin duaali



4. Matriisiryhmien topologia

Aliryhmä $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ geometrisenä objektina

$$G \subset GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^{n^2}, & \text{kun } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^{2n^2}, & \text{kun } \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ \mathbb{R}^{4n^2}, & \text{kun } \mathbb{K} = \mathbb{H} \end{cases}$$

Huom.

$$S_n(u_{jk} + i v_{jk}) = \begin{pmatrix} u_{jk} & v_{jk} \\ -v_{jk} & u_{jk} \end{pmatrix} \quad S_n(M_n(\mathbb{C})) \subset M_{2n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{4n^2}$$

$$\Psi_n(z_{es} + w_{es} j) = \begin{pmatrix} z_{es} & w_{es} \\ -\overline{w_{es}} & \overline{z_{es}} \end{pmatrix} \quad S_{2n}(\Psi_n(M_n(\mathbb{H}))) \subset S_{2n}(M_{2n}(\mathbb{C})) \subset M_{4n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{16n^2}$$

mutta vapaita muuttujia vain $\frac{4n^2}{2} = 2n^2$ kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ja $\frac{8n^2}{2} = 4n^2$ kun $\mathbb{K} = \mathbb{H}$

Topologisesti voidaan siis ajatella: $G \subset \mathbb{R}^m$, jolloin m voidaan kysyä: Minkä muotoinen osajoukko $G \subset \mathbb{R}^m$ on? Esim. edellä oli $Sp(1) \triangleq S^3$.

<u>Määritelmä</u> Aliryhmä $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ on <u>matriisiryhmä</u>, jos G on suljettu $GL_n(\mathbb{K})$:ssa.

<u>Muistutus</u> 1) Ol. $K \subset \mathbb{R}^m$. $S \subset K$ on avoin (suljettu) joukossa K jos $\exists$ $\mathbb{R}^m$:n avoin (suljettu) joukko U s.e. $S = U \cap K$.

2) Jos K avoin, niin S avoin K:ssa $\Leftrightarrow$ S avoin $\mathbb{R}^m$:ssä
" suljettu " suljettu " $\Leftrightarrow$ S suljettu "

3) Ol. $S \subset K \subset \mathbb{R}^m$. S on suljettu K:ssa $\Leftrightarrow$ $\forall p \in K$, joka on S:n kasautumispiste pätee: $p \in S$

Esim $GL_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathbb{R}^m$, $m = \begin{cases} n^2, & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ 2n^2, & \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ 4n^2, & \mathbb{K} = \mathbb{H} \end{cases}$
matriisiryhmä

Huom $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^m$ on avoin,

sillä $\det : \mathbb{R}^m \to \mathbb{K}$ jatkuva (m:n muuttujan polynomina) ja $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ avoin.

Matriisiryhmän ehto "suljettu" tarkoittaa siis: Jos G:n alkioilla on kasautumispiste $\in GL_n(\mathbb{K})$, niin sen täytyy kuulua (joukkoon G.

Toisaalta: Koska $GL_n(\mathbb{K})$ avoin voi löytyä G:lle kasautumispiste A se. $\det A = 0$ ja siis $A \notin G$. Silti G matriisiryhmä.

Pian nähdään, että tämä ehto on välttämätön, jotta matriisiryhmät olisivat monistoja.

4.1. Lause $O_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$, $SO(n)$, $SU(n)$ ovat matriisiryhmiä.

Tod: Riittää todeta, että kukin $GL_n(\mathbb{K})$:n aliryhmä suljettu $GL_n(\mathbb{K})$:ssa.

$O_n(\mathbb{K})$: Ol. $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$
$A \longmapsto AA^*$

f jatkuva, sillä sen komponenttifunktiot

$f_{ij} : \underbrace{M_n(\mathbb{K})}_{\cong \mathbb{R}^m} \to \mathbb{K}$, $f_{ij} = (AA^*)_{ij}$ ovat

polynomeina jatkuvia. Yksiö $\{I_n\} \subset \mathbb{R}^m$ suljettu,

joten $O_n(\mathbb{K}) = f^{-1}(\{I_n\})$ on suljettu $M_n(\mathbb{K})$:ssa

$\Rightarrow$ triviaalisti $O_n(\mathbb{K}) = O_n(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$ suljettu $GL_n(\mathbb{K})$:ssa.

$SL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}\{1\}$ suljettu $M_n(\mathbb{K})$:ssa
$\Rightarrow SL_n(\mathbb{K})$ suljettu $GL_n(\mathbb{K})$:ssa

$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$ kahden suljetun joukon leikkauksena suljettu

$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$ —"—

4.2 <u>Lause</u> Matriisiryhmät $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ ja $Sp(n)$ ovat kompakteja $\forall n$.

<u>Tod</u>: Lauseen 4.1 todistuksessa osoitettiin vahvempi tulos: kaikki näiden matriisiryhmät suljettuja euklidisessa avaruudessa $M_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{R}^m$. Riittää siis osoittaa (Heine-Borel), että ryhmät rajoitettuja $\mathbb{R}^m$:ssä:

L. 3.2.1 (3) $\Rightarrow \forall A \in O_n(\mathbb{K})$ sarakkeet yksikkövektoreita $\Rightarrow A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^m \quad |a_{ij}| \leq 1 \quad \forall i,j$

$\Rightarrow |A| \leq m \quad \forall A \in O_n(\mathbb{K})$. $\square$.

<u>Esim</u>. Ol. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tällöin

$G = \{(e^{\lambda 2\pi n i}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset U(1)$ <u>ei</u> ole matriisiryhmä annetun määritelmän mielessä.

5. Lien algebrat

Matriisiryhmä $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ todettiin euklidisen avaruuden $M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{R}^3$ osajoukoksi, joten voidaan asettaa.

<u>Määritelmä</u> Ol. $G \subset \mathbb{R}^m$ joukko ja $p \in G$. Pisteeseen <u>p liittyvä G:n tangenttiavaruus</u> on

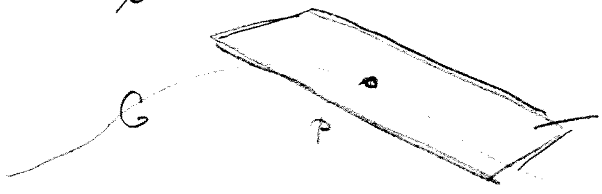
$$T_pG := \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \text{ differentioituva ja } \gamma(0) = p\}.$$

<u>Huom</u> Yllä <u>differentioituva</u> $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \subset \mathbb{R}^m$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$: $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ differentioituva $\forall i = 1, \dots, m$

Jos $G \subset \mathbb{R}^3$ kahden reaalimuuttujan differentioituvan funktion graafi:

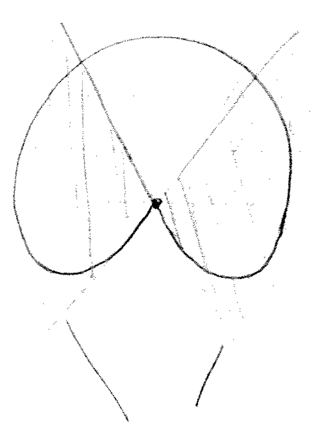
$$G = \{(x, y, f(x, y)) \mid f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ differentioituva}\},$$

niin T_pG on 2-ulotteinen $\mathbb{R}^3$:n vektorialiavaruus $\forall p \in G$

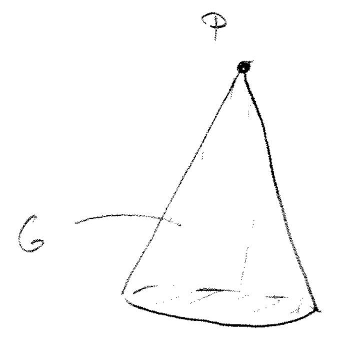


Yleensä mv. $G \subset \mathbb{R}^m$ T_pM ei tarvitse olla vektorialiavaruus:

$G \subset \mathbb{R}^2$



$G \subset \mathbb{R}^3$



<u>Määritelmä</u>: Matriisiryhmän $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ <u>Lien algebra</u> on identtiseen alkioon $I \in G$ liittyvä G:n tangenttiavaruus.

Merkitään $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(G) := T_I G$

5.1. <u>Lien algebra on vektoriavaruus</u>

Ol. $G \subset GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ matriisiryhmä.

Edellä identifikaatio $M_n(\mathbb{K}) \triangleq \mathbb{R}^m$

esim. $M_2(\mathbb{C}) \triangleq \mathbb{R}^8$

$$M_2(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{pmatrix} \overset{\rho_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow (a,b,c,d,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^8$$

Tällöin differentioituva polku $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_2(\mathbb{C})$ on muotoa

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t) + b(t)i & c(t) + d(t)i \\ e(t) + f(t)i & g(t) + h(t)i \end{pmatrix}, \text{ missä}$$

$t \mapsto a(t), \dots, t \mapsto h(t)$ differentioituvia funktioita $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

Derivaatta: $$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) + b'(t)i & c'(t) + d'(t)i \\ e'(t) + f'(t)i & g'(t) + h'(t)i \end{pmatrix}$$

eli $\gamma' : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_2(\mathbb{C})$

5.1.1 <u>Lause</u> (tulon derivointisääntö)

Jos $\gamma, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_n(\mathbb{K})$ differentioituvia, niin tulopolku $(\gamma \cdot \beta)(t) := \gamma(t) \cdot \beta(t)$ on differentioituva ja pätee $(\gamma \cdot \beta)'(t) = \gamma(t)\beta'(t) + \gamma'(t)\beta(t)$.

Tod: $n=1$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ tavallinen tulon derivoimissääntö (L1) 5.3.

$n=1$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ kompleksiarvoisten funktioiden tulon derivoimissääntö (L2)

$n=1$, $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ analogisesti

Yl. tapaus: $((\gamma\cdot\beta)(t))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma(t)_{ik}\beta(t)_{kj}$

$$\Rightarrow ((\gamma\cdot\beta)'(t))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma'(t)_{ik}\beta(t)_{kj} + \gamma(t)_{ik}\beta'(t)_{kj}\right)$$

$$= (\gamma'(t)\beta(t))_{ij} + (\gamma(t)\beta'(t))_{ij} \quad \square.$$

Ol. $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to GL_n(\mathbb{K})$ differentioituva polku

käänteispolku $\gamma^{-1} : (-\varepsilon,\varepsilon) \to GL_n(\mathbb{K})$

$$\gamma^{-1}(t) = (\gamma(t))^{-1}$$

on myös differentioituva (Cramer: $(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j}\dfrac{\det(A_{ji})}{\det A}$)

Tulosääntö $\Rightarrow$ $0 = \dfrac{d}{dt}(I_n) = \dfrac{d}{dt}\left(\gamma(t)\gamma(t)^{-1}\right)$

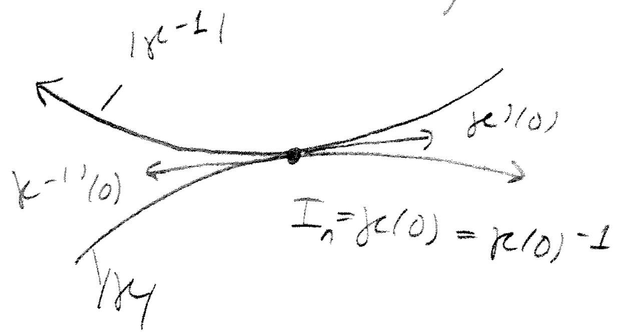
$$= \gamma'(t)\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\gamma(t)^{-1}\right).$$

Tapauksessa $\gamma(0) = I_n$ saadaan:

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t))^{-1}\Big|_{t=0} = -\gamma'(0) \qquad (!)$$

Ts: polun γ käänteismatriiseista koostuva polku γ^{-1} kulkee polkua γ pisteessä I_n vastakkaiseen suuntaan.

Oikeutus termille 'käänteispolku'



5.1.2. Lause Matriisiryhmän $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ Lien algebra $\mathfrak{g}$ on $M_n(\mathbb{K})$:n reaalinen vektorialiavaruus. (5.4.)

Tod: Ol. $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $A \in \mathfrak{g}$ l. $A = \gamma'(0)$ jollakin differentioituvalla polulla $\gamma : t \mapsto \gamma(t) \in G$ ja $\gamma(0) = I_n$.

Muodostetaan polku $\sigma : t \mapsto \sigma(t) := \gamma(\lambda t)$ (pienentämällä param. väliä sopivalla λ)
Tällöin
$$\sigma'(t) = \lambda\gamma'(t) \quad \text{ja} \quad \sigma'(0) = \lambda\gamma'(0) = \lambda A$$
$\Rightarrow \lambda \cdot A \in \mathfrak{g}$.

Olk. $A, B \in \mathfrak{g}$ eli $A = \gamma'(0)$ ja $B = \beta'(0)$ joillakin differentioituvilla $\gamma : t \mapsto \gamma(t) \in G$, $\beta : t \mapsto \beta(t) \in G$ ja $\gamma(0) = I_n = \beta(0)$.

Tulopolku $\sigma : t \mapsto \sigma(t) = \gamma(t) \cdot \beta(t) \in G$ on differentioituva ja L. 5.1.1 $\Rightarrow$
$$\sigma'(t) = \gamma'(t)\beta(t) + \gamma(t) \cdot \beta'(t)$$
$\Rightarrow$
$$\sigma'(0) = \gamma'(0) + \beta'(0) = A + B$$

$\Rightarrow A + B \in \mathfrak{g}$. $\square$

Määritelmä Matriisiryhmän G dimensio

$\dim G := \dim \mathfrak{g}$ = Lien algebran vektoriavaruuden dimensio

Huom Vaikka $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ on $\mathbb{C}$-kertoiminen v.a niin kompleksisen matriisiryhmän $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ Lien algebran EI tarvitse olla $M_n(\mathbb{C})$:n kompleksinen vektorialiavaruus

Samoin kvaternionisen matriisiryhmän Lien algebran ei tarvitse olla $M_n(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}^{n^2}$:n $\mathbb{H}$-kertoiminen v.a.a.

Erityisesti siis matriisiryhmän dimensiolla tarkoitetaan aina sen Lien algebran dimensiota kun se tulkitaan reaaliseksi vektoriavaruudeksi.